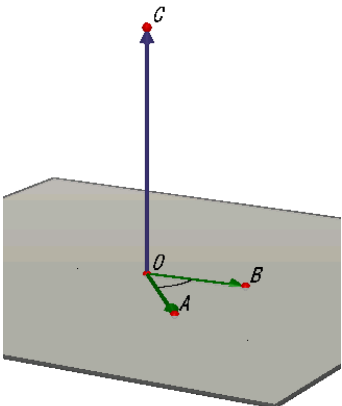
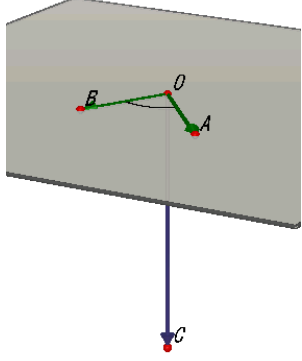


空間ベクトルの外積

ここでは出来る限り図形的に説明します. 計算による証明は 例えば [Wikipedia](#) をご覧ください.

1.定義

	
<p>OA を OB に重ねるようにネジを回すと、ネジは平面に対し上向きに進む</p>	<p>OA を OB に重ねるようにネジを回すと、ネジは平面に対し下向きに進む</p>

\vec{a} と \vec{b} の外積 \vec{c} は、「 \vec{a}, \vec{b} が張る平面 π に垂直」で、かつ「長さが \vec{a} と \vec{b} の張る三角形の面積 S と等しい」3次元ベクトルとします. ただし平面と直交するベクトルの向きは2つあり、そのいずれかを選ぶ必要があります. そこで、 \vec{c} の向きは、

\vec{a} を \vec{b} と平行になるように、180度以下の角度だけ廻したときに、右ネジの進む向き

とします. (この定義では $\vec{a} // \vec{b}$ のときは \vec{c} の向きが定まりませんが、このときは $S = 0$ だから、 $\vec{c} = \vec{0}$ とします.)

\vec{a} と \vec{b} の外積 \vec{c} を $\vec{a} \times \vec{b}$ と表すことにします. すると \vec{a} と \vec{b} の角度が $\theta (0 < \theta < \pi)$ のとき、定義より、

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \text{ かつ } (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$$

また定義から 次の性質も明らかです.

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}), \quad \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{0} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}, \quad (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (k \text{ は実数})$$

1.1 Cabri3D による検証

A, B, C を動かしてみてください. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \overrightarrow{OC}$ です.

(視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい) [definition.html](#)

2.分配法則

外積には分配法則が成り立ちます。すなわち

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$$

2番目の式は、一番目の式から、「 $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ 」を使えば簡単に証明できるので、1番目の式だけ証明します。

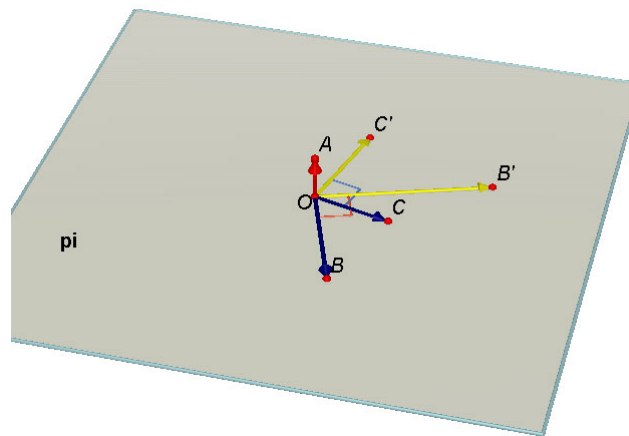
2-1. \vec{a} が、 \vec{b} と \vec{c} の張る平面と垂直なとき.

$\vec{a} = \overline{OA}, \vec{b} = \overline{OB}, \vec{c} = \overline{OC}, \overline{OB'} = \vec{a} \times \vec{b}, \overline{OC'} = \vec{a} \times \vec{c}$, さらに平面OBCを π とします。

$\vec{a} \perp \vec{b}$ かつ $\vec{a} \perp \vec{c}$ のとき、点B,Cは π 上で、それぞれ点B,CをOの周りに90度回転し、Oからの距離を $|\vec{a}|$ 倍にした点となります。すなわち平面 π 上のベクトル \vec{p} に対しては、

「 $\vec{a} \times \vec{p}$ 」は「 \vec{p} を \vec{a} の周りに90度回転し、Oからの距離を $|\vec{a}|$ 倍にする」こと

であり、回転と拡大の合成変換です。よって「 $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ 」が成り立ちます。



2-1-1. Cabri3D による検証.

点A,B,Cを動かしてみてください。(視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい.)

[distribution law basic.html](http://distribution-law-basic.html)

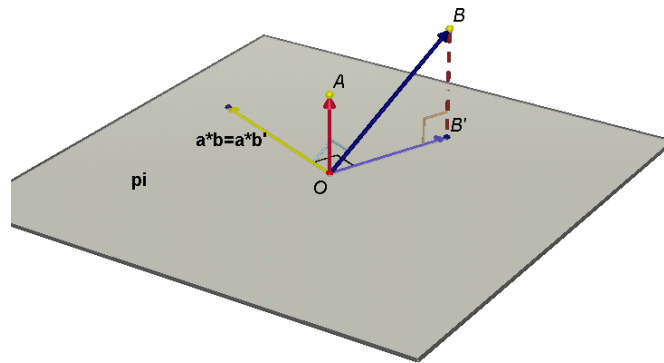
2-2. \vec{a} が、 \vec{b} と \vec{c} の張る平面と垂直でないとき.

\vec{a} と垂直で原点 O を通る平面を π とし、 π の上への \vec{b} の正射影を \vec{b}' としたとき、 \vec{a} と \vec{b} の張る三角形の面積は \vec{a} と \vec{b}' の張る三角形の面積と一致するので、「 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}'$ 」です。

ゆえに、空間内のベクトル \vec{p} に対し、「 $\vec{a} \times \vec{p}$ 」は

「 \vec{p} の平面 π への正射影ベクトル \vec{p}' を作り、 \vec{p}' を \vec{a} の周りに 90 度回し、 O からの距離を $|\vec{a}|$ 倍にする」

ことと同じであり、正射影と回転と拡大の合成変換です。従って、「 $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ 」が成り立ちます。



2-2-1 Cabri3D による検証

点 A,B,C を動かしてみてください。(視点を変えるときは右ボタンを押しながらグリグリして下さい)

distribution.law.basinc.html

3. 外積の成分表示

以上から $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ のとき、 $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ とすると、

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z) \times (x_2 \vec{e}_x + y_2 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z) \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + (y_1 z_2 - z_2 y_1) \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_x) \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_z + (y_1 z_2 - z_2 y_1) \vec{e}_x + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{e}_y \\ &= (y_1 z_2 - z_2 y_1, \quad z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1)\end{aligned}$$