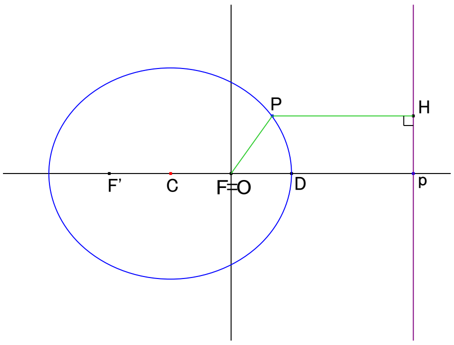
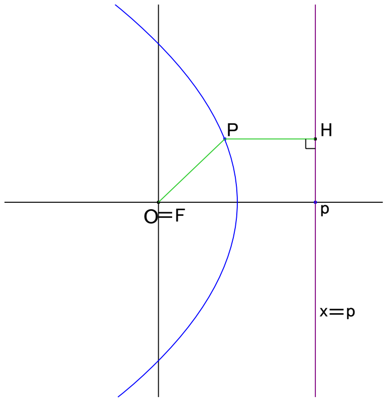
１．離心率と２次曲線

2 次曲線は「定点からの距離と，準線までの距離の比が一定な点の軌跡」としても定義されます．定点を原点 O，準線を $l\,;x=p$，点 P から l に下ろした垂線の足を H，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=e$ とすると，P の軌跡は，

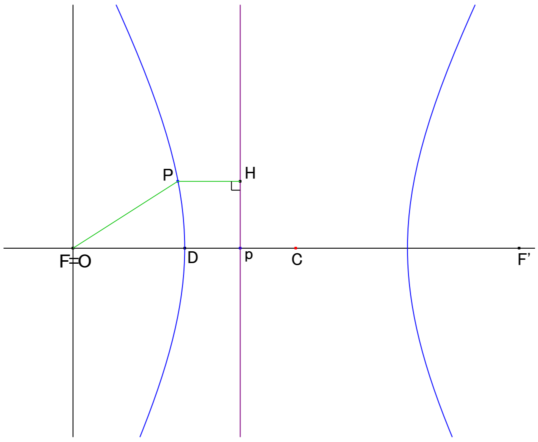
$$\boxed{\begin{cases} 0<e<1\ \text{のとき} & \text{楕円} \\ e=1\ \text{のとき} & \text{放物線} \\ e>1\ \text{のとき} & \text{双曲線} \end{cases}}$$



$0<e<1$ のとき　楕円



$e=1$ のとき　放物線



$e>1$ のとき　双曲線

特に，楕円や双曲線のとき，その式はそれぞれ

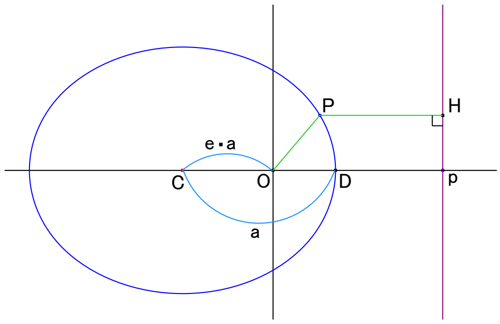
$$\frac{(x+ea)^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{(1-e^2)a^2}=1$$

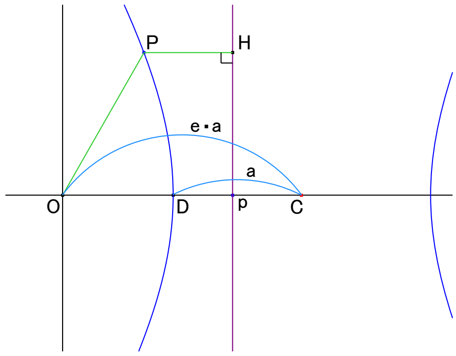
の形になります．よって，O は焦点となります．

また，中心を C，2 次曲線と長軸の交点のうち O に近い方を D とするとき，

$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CD}}=e$$

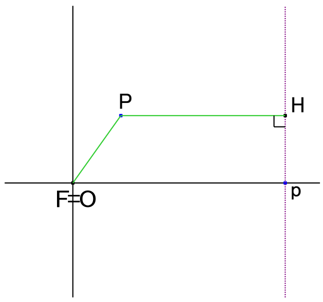
楕円では特に「離心率」（中心からのずれの割合）という名前は納得できます．





【証明】

$P(x,y)$ とすると，「$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=e$」より，



$$\sqrt{x^2+y^2}=e\,|x-p|\Longleftrightarrow x^2+y^2=e^2(x-p)^2$$

$$\Longleftrightarrow(1-e^2)x^2+2p\,e^2x+y^2-e^2p^2=0\cdots(*)$$

よって，$e=1$のとき，　　$x=-\dfrac{y^2}{2p}+\dfrac{p}{2}$

$e\neq1$のとき，　　$\dfrac{\left(x+\dfrac{e^2p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{ep}{1-e^2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{(1-e^2)\left(\dfrac{ep}{1-e^2}\right)^2}=1$

ゆえに，

$$\begin{cases}0<e<1\ のとき & 楕円\\ e=1\ のとき & 放物線\\ e>1\ のとき & 双曲線\end{cases}$$

となります．　また $e\neq1$のときは，

$$\frac{(x+ea)^2}{a^2}+\frac{y^2}{(1-e^2)a^2}=1\ ，但し\ \ a=\frac{ep}{1-e^2}$$

よって，焦点の 1 つは原点 O となります．さらに，

$$\frac{\text{中心と焦点の距離}}{a}=e \quad \left(\text{即ち}\ \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}=e\right)$$

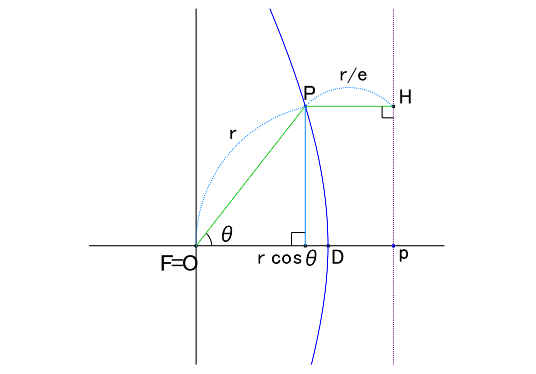
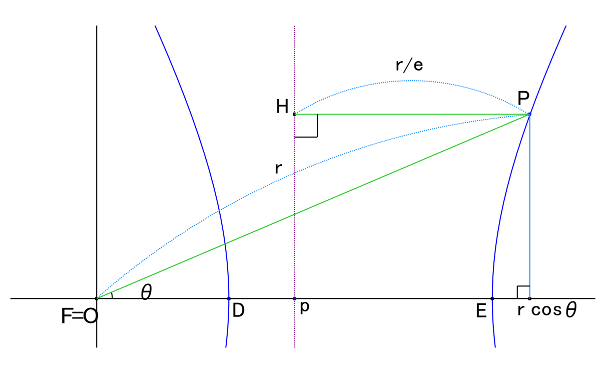
も成り立ちます．

1-1. Cabri Ⅱ による検証

線分上の点 e，点 P, 準線と x 軸の交点 p を drag してください． eccentricity.html

２．２次曲線と極方程式

原点 O を極としたときの P の偏角を θ， $\mathrm{OP}=r$，準線を $x=p$，離心率を e とします.

	
曲線が準線よりも左側にある時	曲線が準線よりも右側にある時

曲線が準線よりも左側にある時，上図より，

$$r\cos\theta+\frac{r}{e}=p \iff r=\frac{ep}{1+e\cos\theta} \quad \cdots①$$

曲線が準線よりも右側にある時，上図より，

$$r\cos\theta-\frac{r}{e}=p \iff r=\frac{ep}{-1+e\cos\theta} \quad \cdots②$$

極方程式では，「$r<0$ のときは，極座標で (r,θ) の点には $(-r,\theta+\pi)$ を対応させる$\cdots$(注)」ので，①と②の式は１つにまとめることができます．即ち②の式で $r<0$ となるときは，

$$\theta'=\theta+\pi \text{ の偏角に対し，}\quad \mathrm{OP}=-\frac{ep}{-1+e\cos\theta}=-\frac{ep}{-1+e\cos(\theta'-\pi)}=\frac{ep}{1+e\cos\theta'}$$

を対応させますから，①と同じになります．すなわち，２次曲線の極方程式は，

$$\boxed{r=\frac{ep}{1+e\cos\theta}}$$

と１つにまとめることができます.

【注】このように定めると，極表示と直交表示の基本関係；$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ が，$(-r,\theta+\pi)$ の点に対しても，成り立ちます．また①，②は， 前項の(*)の式に直接，上の基本関係の式を代入しても導けます.

また，Cabri II のファイルは，前項のファイルと共通です.

３．離心率と２次曲線の標準形

離心率の性質は，教科書で２次曲線の方程式を導くときに「手の届くところに」あります．

3-1.楕円の場合

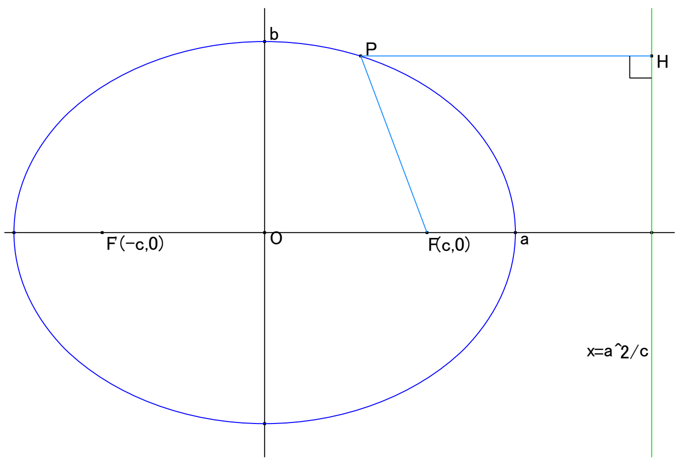
焦点が $F(c,0)$ と $F'(-c,0)$ で， $PF+PF'=2a$ となる点を $P(x,y)$ とすると，

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \Longleftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a$$

両辺を２乗して整理すると，

$$4cx=-4a\sqrt{(x-a)^2+y^2}+4a^2 \Longleftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)\cdots①$$

即ち，準線を l： $x=\dfrac{a^2}{c}$，P から l に下ろした垂線の足を H とするとき， $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{c}{a}$ となります．離心率 e は， $e=\dfrac{c}{a}<1$ です．



【注】①の式をさらに２乗して整理すると，楕円の標準形の式が得られます．

3-1. CabriⅡによる検証

点 P,a,b を drag してください． ellipse.html

3-2. 双曲線の場合

焦点が $F(c,0)$ と $F'(-c,0)$ で，$PF-PF'=2a$ となる点を $P(x,y)$ とすると，

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2a$$

両辺を２乗して整理すると，

$$4cx=-4a\sqrt{(x-a)^2+y^2}+4a^2 \iff \sqrt{(x-a)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)\cdots①$$

同様に，$PF-PF'=-2a$ となる点を $P(x,y)$ とすると，

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-2a \iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a$$

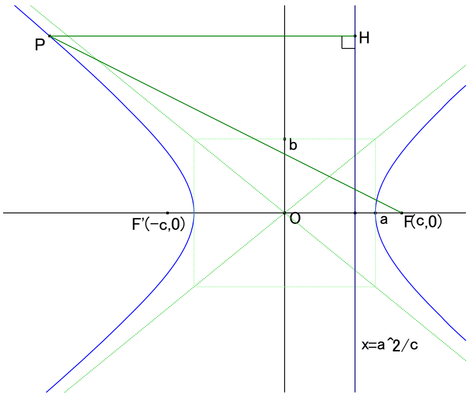
両辺を２乗して整理すると，

$$4cx=4a\sqrt{(x-a)^2+y^2}+4a^2 \iff \sqrt{(x-a)^2+y^2}=\frac{c}{a}x-a=\frac{c}{a}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)\cdots②$$

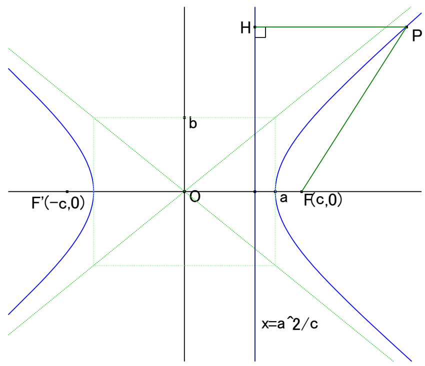
①，②をまとめると，

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left|x-\frac{a^2}{c}\right| \quad \cdots③$$

即ち，準線を $l:x=\dfrac{a^2}{c}$，P から l に下ろした垂線の足を H とするとき，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{c}{a}$ となります．離心率 e は，$e=\dfrac{c}{a}>1$ です．



$PF - PF' = 2a$ のとき，左の枝上に P はある



$PF - PF' = -2a$ のとき，右の枝上に P はある

【注】③の式をさらに２乗して整理すると，双曲線の標準形の式が得られます．

３‐２．CabriⅡによる検証

点 P,a,b を drag してください．強く引けば，点 P は一つの枝から，他の枝に移ります．

hyperbolic.html