クラインモデル(Klein Model)

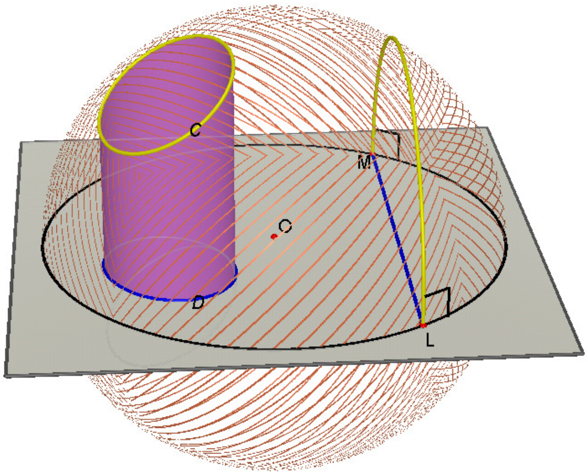
１．クラインモデルの基本図形

クラインモデルの基本図形は　半球面モデルの基本図形を，xy 平面に正射影して得られる図形です．メリットは双曲的直線がユークリッド的線分になる事です．但し，双曲的円はユークリッド的楕円になり，角度や距離の定義も「複比」を使わないと難しくなります．

１-１．双曲的直線，双曲的円，等距離線，極限円

クラインモデルの**直線**と**円**は，半球面モデルの直線と円を，xy 平面上に正射影して得られる図形です．（右図で線分 ML が**直線**，楕円 D が**円**です.）

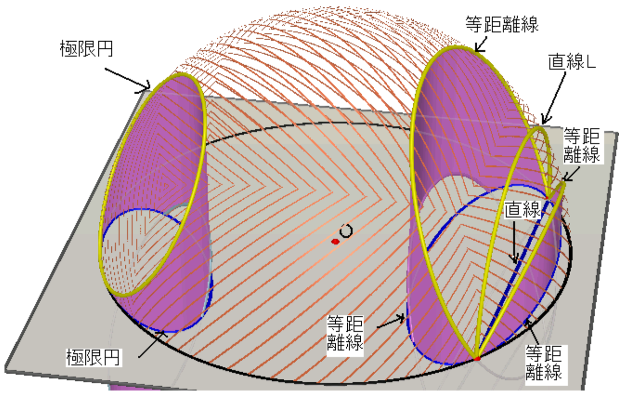
クラインモデルの**直線**は「ユークリッド的線分」に，また**円**は「単位円と共有点を持たない楕円」となります．
但し「短軸の延長線が原点を通る楕円」です．



クラインモデルの**等距離線**と**極限円**は，半球面モデル上の等距離線と極限円を，xy 平面に正射影した図形です．

極限円は「単位円と１点で接する楕円」となります．

等距離線は 「単位円と２点で接する楕円の半分」となります．



右上図の半球面モデルで 直線 L からの等距離線は２本あり，これらを xy 平面に正射影しクラインモデルの等距離線が２本できます．しかし半球面上の２本の等距離線を一つの円にまとめ（xy 平面に関し対称移動し $z<0$ にも伸ばす），xy 平面に正射影しても同じ正射影が得られるので，クラインモデルの２本の等距離線を束ねた楕円は 単位円と接します．

1-1-2. Cabri3D による検証

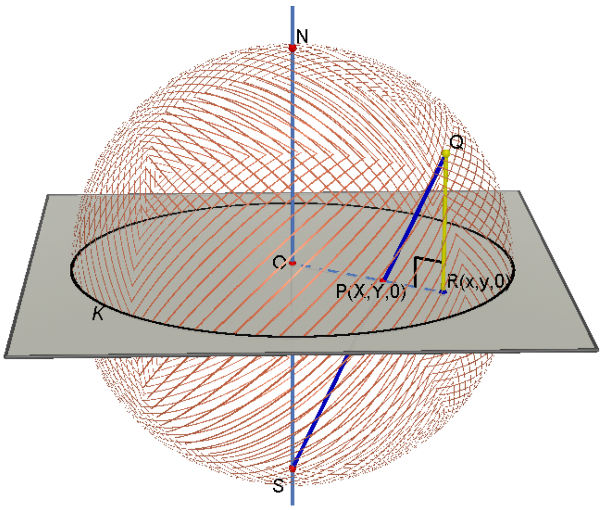
直線と円.　　　　　　Drag　P,Q,R,L,M　　　　line&circle_with_SphereModel.html

極限円と等距離線.　　Drag P_1,P_2,Q_1,Q_2,R_1,R_2　　horicircle&equiline_with_Sphere.html

1- 2.　ポアンカレ円盤とクラインモデル

ポアンカレ円盤上の点を$P(X,Y,0)$，それを 南極 S からの立体射影で上半球面に移した点をQ，Q を xy 平面に正射影した点を$R(x,y,0)$とすると，半球面モデル 2-1 より，

$$\begin{cases} x=\dfrac{2X}{1+X^2+Y^2} \\ y=\dfrac{2Y}{1+X^2+Y^2} \end{cases} \cdots ①$$

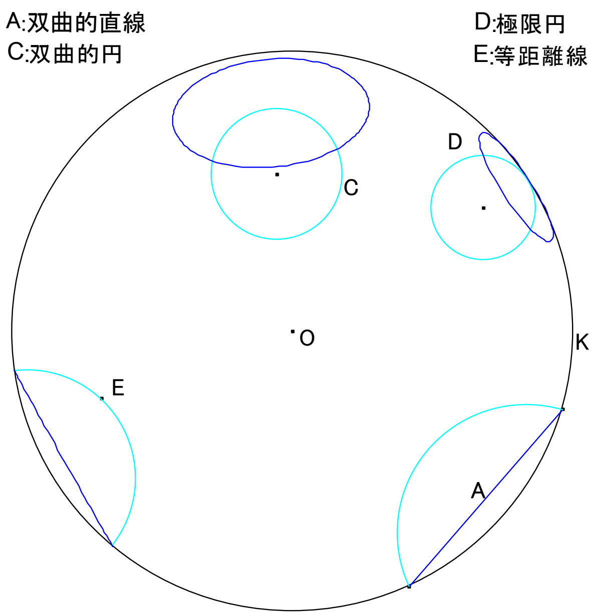


また，この逆変換は，(単純計算で)

$$\begin{cases} X=\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ Y=\dfrac{y}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{cases} \cdots ②$$

O, P, R は当然，一直線上に並びます．①を使って，ポアンカレ円盤内の基本図形（水色）を，クラインモデル内の基本図形（青）に移すことが出来ます．

クラインモデルの円や極限円，等距離線は楕円ですが，これらはポアンカレ円盤の円を①を用いて変換したものなので，3 点で決まります．図形的には「短軸の延長線が原点を通るような楕円」 です．



1-2-1. CabriⅡによる検証

青い色の図形はクラインモデルの基本図形で，薄い円や直線はポアンカレ円盤の対応する図形です．　Drag B,C,D,E,X,Y　basic_objects_with_PoincareDisk1.html

3 点 P,Q,R を通る基本図形（円，極限円，等距離線）ができます．Drag　P,Q,R.

basic_objects_with_PoincareDisk2.html

,