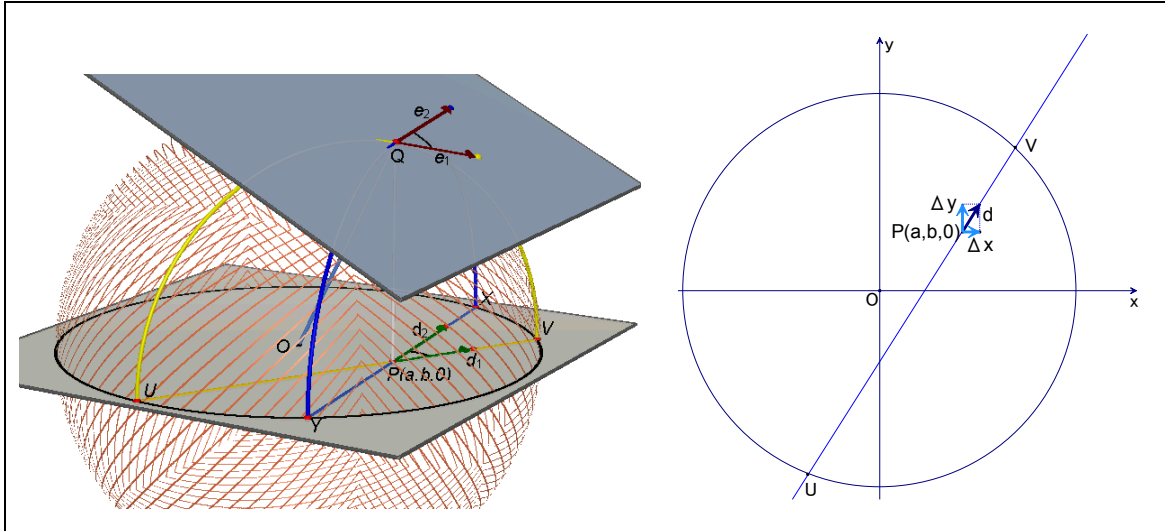


3. 双曲的長さや角度 (解析的に)

3-1. 双曲的角

クラインモデル内の双曲的直線 XY と UV が点 P で交わっている時、P に対応する半球面モデル上の点を Q とすると、「XY と UV のなす双曲的角」は「Q に於いて円弧 XQY と UQV のなすユークリッド的角」(下図では \vec{e}_1 と \vec{e}_2 のなすユークリッド的角) と等しい。



$P(a, b, 0)$ とすると、 $Q(a, b, \sqrt{1-a^2-b^2})$. よって、Q に於ける接平面を π とすると、

$$\pi: ax + by + \sqrt{1-a^2-b^2} z = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

線分 UV の方向ベクトルを $\vec{d}_1 = (\Delta x_1, \Delta y_1, 0)$ とすると、線分 UV 上の点は、

$$\begin{cases} x = a + \Delta x_1 \cdot t \\ y = b + \Delta y_1 \cdot t \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②を連立して、

$$z = \sqrt{1-a^2-b^2} - \frac{a\Delta x_1 + b\Delta y_1}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \cdot t \quad \dots \textcircled{3}$$

よって、 \vec{d}_1 を正射影として持つような、球面の接ベクトルを \vec{e}_1 とすると、②と③より、

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ -\frac{a\Delta x_1 + b\Delta y_1}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \end{pmatrix}$$

同様に, XY に対して 方向ベクトル $\vec{d}_2 = (\Delta x_2, \Delta y_2, 0)$ と, 接ベクトル \vec{e}_2 を定めると,

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ -\frac{a\Delta x_2 + b\Delta y_2}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \end{pmatrix}$$

ゆえに,

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{(1-b^2)\Delta x_1\Delta x_2 + ab(\Delta x_1\Delta y_2 + \Delta x_2\Delta y_1) + (1-a^2)\Delta y_1\Delta y_2}{1-a^2-b^2} \quad \dots \textcircled{4}$$

XY と UV 間の双曲的角を θ とすると, θ は \vec{e}_1, \vec{e}_2 のユークリッド的角と等しいので,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_1| |\vec{e}_2|} = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\sqrt{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \cdot \sqrt{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}} \\ &= \frac{(1-b^2)\Delta x_1\Delta x_2 + ab(\Delta x_1\Delta y_2 + \Delta x_2\Delta y_1) + (1-a^2)\Delta y_1\Delta y_2}{\sqrt{(1-b^2)(\Delta x_1)^2 + 2ab(\Delta x_1\Delta y_1) + (1-a^2)(\Delta y_1)^2} \cdot \sqrt{(1-b^2)(\Delta x_2)^2 + 2ab(\Delta x_2\Delta y_2) + (1-a^2)(\Delta y_2)^2}} \end{aligned}$$

(注: この式は $\Delta x, \Delta y$ が微少量でなくとも成り立ちます) ...(*)

Cabri による検証

Drag X,Y,U,V \vec{d}_1, \vec{d}_2 のなす角と \vec{e}_1, \vec{e}_2 のなす角は異なります. [angle.html](#)

3-2. 双曲的距離

④で 「 $\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ 」 とすると, ユークリッド的距離 $|\vec{e}_1|$ の2乗は,

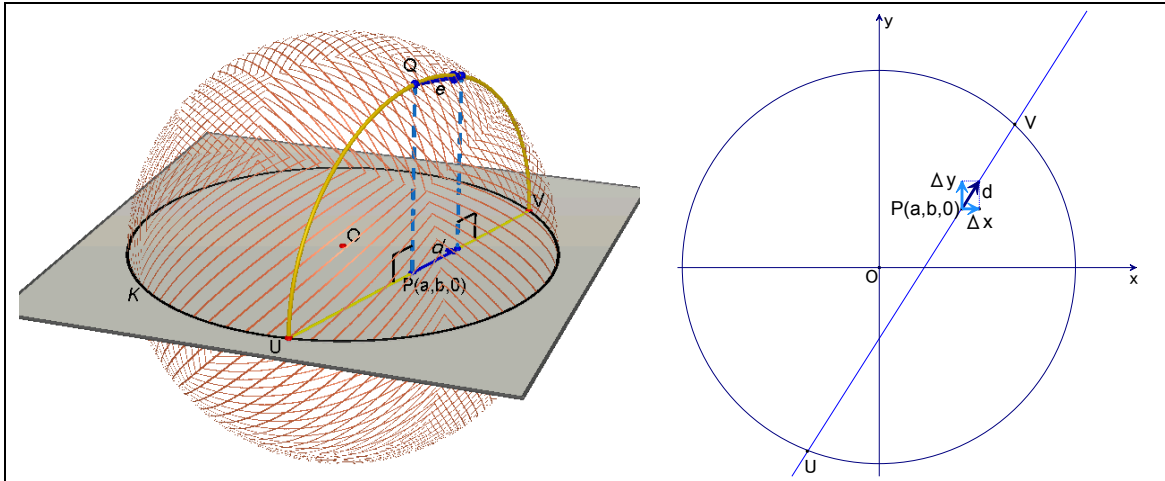
$$|\vec{e}_1|^2 = \frac{(1-b^2)(\Delta x_1)^2 + 2ab(\Delta x_1)(\Delta y_1) + (1-a^2)(\Delta y_1)^2}{1-a^2-b^2} \quad \dots \textcircled{5}$$

半球面モデル (または H^3 モデル) では, ユークリッド的微小距離 Δl に対する双曲的距離

を Δs とすると, 「 $\Delta s \doteq \frac{\Delta l}{z}$ 」 だから, 点 $P(a, b, 0)$ から, $\vec{d} = (\Delta x, \Delta y, 0)$ だけ動いたとき,

その移動 \vec{d} の双曲的距離 Δs は, (\vec{d} に対応する半球面上のベクトルを \vec{e} とすると)

$$(\Delta s)^2 \doteq \frac{|\vec{e}|^2}{(Q_z)^2} = \frac{|\vec{e}|^2}{1-a^2-b^2} = \frac{(1-b^2)(\Delta x)^2 + 2ab(\Delta x)(\Delta y) + (1-a^2)(\Delta y)^2}{(1-a^2-b^2)^2} \dots (**)$$



点 P が $P(a, b, 0)$ から, $\vec{d} = (\Delta x, \Delta y, 0)$ だけ動いたとき, 移動 \vec{d} の双曲的距離 Δs は,

$$(\Delta s)^2 \doteq \frac{|\vec{e}|^2}{(Q_z)^2} = \frac{|\vec{e}|^2}{1 - a^2 - b^2} = \frac{(1 - b^2)(\Delta x)^2 + 2ab(\Delta x)(\Delta y) + (1 - a^2)(\Delta y)^2}{(1 - a^2 - b^2)^2} \dots (**)$$

(注: この式は $\Delta x, \Delta y$ が微量の時のみ 成立します)

3-3. クラインモデルの特徴 (微小距離の非等方性)

3-2 から,

$$(\Delta s)^2 \doteq \frac{|\vec{e}|^2}{(Q_z)^2} = \frac{|\vec{e}|^2}{1-a^2-b^2} = \frac{(1-b^2)(\Delta x)^2 + 2ab(\Delta x)(\Delta y) + (1-a^2)(\Delta y)^2}{(1-a^2-b^2)^2} \dots (**)$$

「ポアンカレ上半平面」, 「ポアンカレ円盤」, 「上半球面モデル」では, それぞれ,

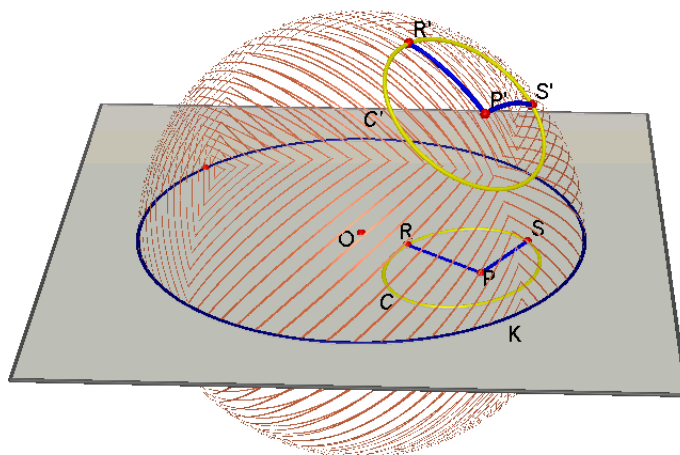
$$ds = \frac{dl}{y}, \quad ds = \frac{2dl}{1-a^2-b^2}, \quad ds = \frac{dl}{z} \quad (\text{但し } dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2})$$

のように, ユークリッド的距離 dl が決まると, 対応する双曲的距離も決まりました.

ところが, (**)より, クラインモデルでは, 例えば「 $(\Delta x, \Delta y) = (0.1, 0)$ 」のときと, 「 $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0.1)$ 」のときでは, 双曲的距離が異なることが分かります.

このように, クラインモデルでは 微小線分の非ユークリッド距離は, そのユークリッド距離だけでは決まらず, その方向によっても変わります.

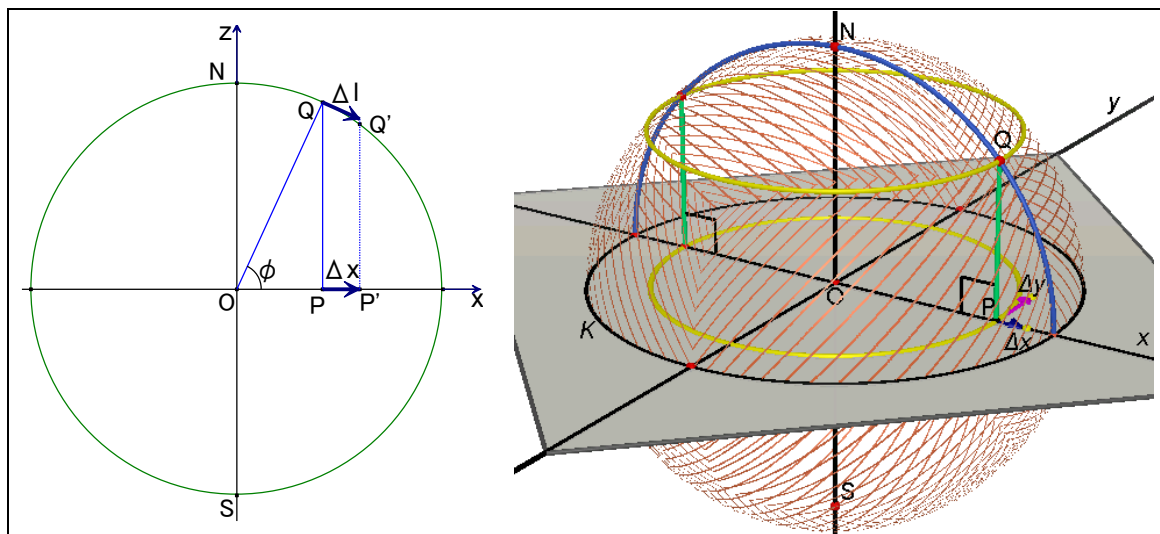
このことは クラインモデルの円が ユークリッド的楕円 であることから明らかです. 下図で C は P を中心とするクラインモデルの円で, 半球面モデルの円 C' を xy 平面に正射影したユークリッド的楕円です. よって S が円 C 上を動いても, P と S の双曲的長さ $[P, S]$ の長さは一定ですが, ユークリッド的距離 \overline{PS} は 変化します. 即ち, $[P, S]$ と \overline{PS} の比は 直線 PS の方向によって変わります.



Cabri による検証

Drag P,Q,R,S [P,S] と \overline{PS} の比が \overline{PS} の方向によって変わります. distance&angle.html

3-3-1. (**)の別の導き方 (極形式を利用)



点 P が x 軸上にあるとし、 P に対応する半球面モデル上の点を Q 、 P が $(\Delta x, \Delta y, 0)$ 移動した時、 Q の「ユークリッド的微小距離」を Δl 、「双曲的微小距離」を Δs とします。

左上図より、 P が動径方向(x 軸方向)に Δx だけ動いた時は、

$$\Delta l = \frac{\Delta x}{\sin \phi} = \frac{\Delta x}{Q_z} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \therefore \Delta s = \frac{\Delta l}{Q_z} = \frac{\Delta x}{1-x^2} \dots \textcircled{1}$$

右上図より、 P が動径と垂直な方向(y 軸方向)に Δy だけ動いた時は、

$$\Delta l = \Delta y \quad \therefore \Delta s = \frac{\Delta l}{Q_z} = \frac{\Delta y}{\sqrt{1-x^2}} \dots \textcircled{2}$$

即ち「動径方向に動くか」、「動径と垂直な方向に動くか」で、 Δl 、 Δs は異なります。

①,②より、 $P(r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ が動径方向に Δr 、それと垂直な方向に $r \Delta \theta$ 移動した時の「双曲的微小距離」は、

$$(\Delta s)^2 = \left(\frac{\Delta l}{Q_z} \right)^2 = \left(\frac{\Delta r}{1-r^2} \right)^2 + \left(\frac{r \Delta \theta}{\sqrt{1-r^2}} \right)^2 = \frac{(\Delta r)^2}{(1-r^2)^2} + \frac{r^2 (\Delta \theta)^2}{1-r^2} \dots (***)$$

これを、直交座標系に直すと、前節の(**)の式が得られます。(詳しくは [ここ](#))