

4. 空間内の4点の複比

4-1. 複比の定義

複比(double ratio)には色々あり「複素平面上の4点に関する複比」(1次分数変換に関して不変), 「一直線上の4点に関する複比」(射影変換に関して不変)が有名です. この節では「複素平面上の複比」と同類の「空間内の4点の複比」を「複比」と呼びます.

ユークリッド空間に無限遠点を付け加えた空間を考え, 空間内の4点 A,B,C,D に関し, 複比 $[A,B|C,D]$ を次の様に定めます. (例えば AC は A と C のユークリッド距離です.)

$$[A,B|C,D] = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \frac{AC \times BD}{AD \times BC}$$

明らかに,

$$[C,D|A,B] = [A,B|C,D], \quad [B,A|C,D] = [A,B|D,C] = \frac{1}{[A,B|C,D]}$$

さらに, これらを組み合わせて使うと,

$$\begin{cases} [A,B|C,D] = [B,A|D,C] = [C,D|A,B] = [D,C|B,A] \\ [B,A|C,D] = [A,B|D,C] = [D,C|A,B] = [C,D|B,A] \left(= \frac{1}{[A,B|C,D]} \right) \dots (*) \end{cases}$$

A,B,C,D を2個ずつの2組に分ける組合せは $\{A,B\}$ と $\{C,D\}$, $\{A,C\}$ と $\{B,D\}$, $\{A,D\}$ と $\{B,C\}$ の3通りあります. 例えば $\{A,B\}$ と $\{C,D\}$ の場合は, (*) の様に 8通りの複比が作れますが, その値は互いに逆数となる2種類しかありません. よって4点から作られる複比の取りえる値は, 最大「 $3 \times 2 = 6$ 種類」です.

A,B,C,D のうち1つが無限遠点のときも, 同様に定めます. 例えば A が無限遠点のとき,

$$[A,B|C,D] = \frac{AC \times BD}{AD \times BC} = \frac{BD}{BC} \quad (A = \infty \text{ のとき})$$

A,B,C,D のうち二つが等しい場合も, 連続性を仮定して, 同様に定義できます. 例えば,

$$[A,B|C,D] = \frac{AC \times BD}{AD \times BC} = 1 \quad (A=B, B=D \text{ の時}), [A,B|C,D] = \frac{AC \times BD}{AD \times BC} = 0 \quad (A=C, B=D \text{ の時})$$

4点のうち「三つ以上が同じ場合」と「無限遠点が2つ以上の場合」は定義しません.

4-2. 複比と鏡像変換

定理：複比は球に関する鏡像によって変化しません。

(但し球は「一般化された球」で、平面も含んで考えます。)

【証明】平面に関する鏡像の時は明らかなので、球に関する鏡像のみ考えます。中心が O 、半径 r の球 K に関する鏡像を f 、 A, B, C, D の f による像を A', B', C', D' とします。

(i) A, B, C, D が全て異なり、かつ無限遠点や O でないとき。

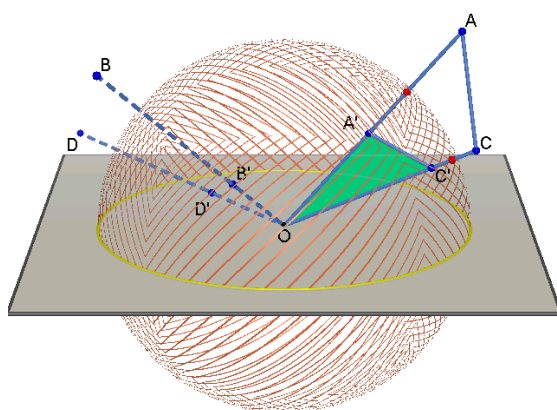
鏡像の定義より「 $OA \times OA' = OC \times OC'$ 」だから、「 $\triangle OAC \sim \triangle OC'A'$ 」。

故に、

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{OC}{OA'}$$

同様にして、

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{OD}{OA'}, \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OB'}, \quad \frac{BD}{B'D'} = \frac{OD}{OB'}$$



よって、

$$\frac{[A, B|C, D]}{[A', B'|C', D']} = \frac{\frac{AC \times BD}{AD \times BC}}{\frac{A'C' \times B'D'}{A'D' \times B'C'}} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{BD}{B'D'} \cdot \frac{A'D'}{AD} \cdot \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC}{OA'} \cdot \frac{OD}{OB'} \cdot \frac{OA'}{OD} \cdot \frac{OB'}{OC} = 1$$

従って、

$$[A', B'|C', D'] = [A, B|C, D]$$

(ii) A, B, C, D のうち 2 点が等しい場合。

例えば「 $A=B$ 」の場合は「 $A'=B'$ 」となり、複比は「ともに 1」となります。

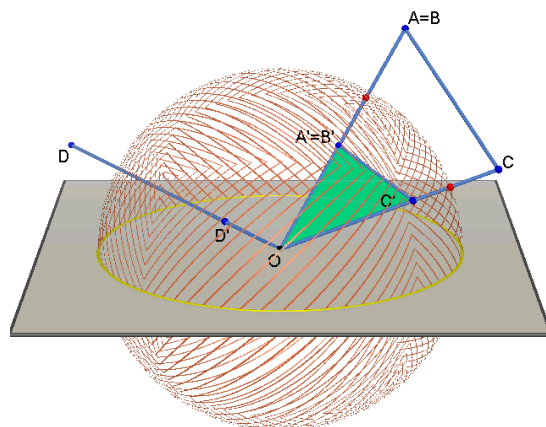
$$[A, B|C, D] = \frac{AC \times BD}{AD \times BC} = \frac{AC \times AD}{AD \times AC} = 1,$$

$$[A', B'|C', D'] = \frac{A'C' \times B'D'}{A'D' \times B'C'} = \frac{A'C' \times A'D'}{A'D' \times A'C'} = 1$$

ゆえに、

$$[A', B'|C', D'] = [A, B|C, D] = 1$$

$A=C, A=D$ の場合も同様に証明できます。



(iii) D が無限遠点, A, B, C は異なる 3 点の場合.

このとき, 定義より

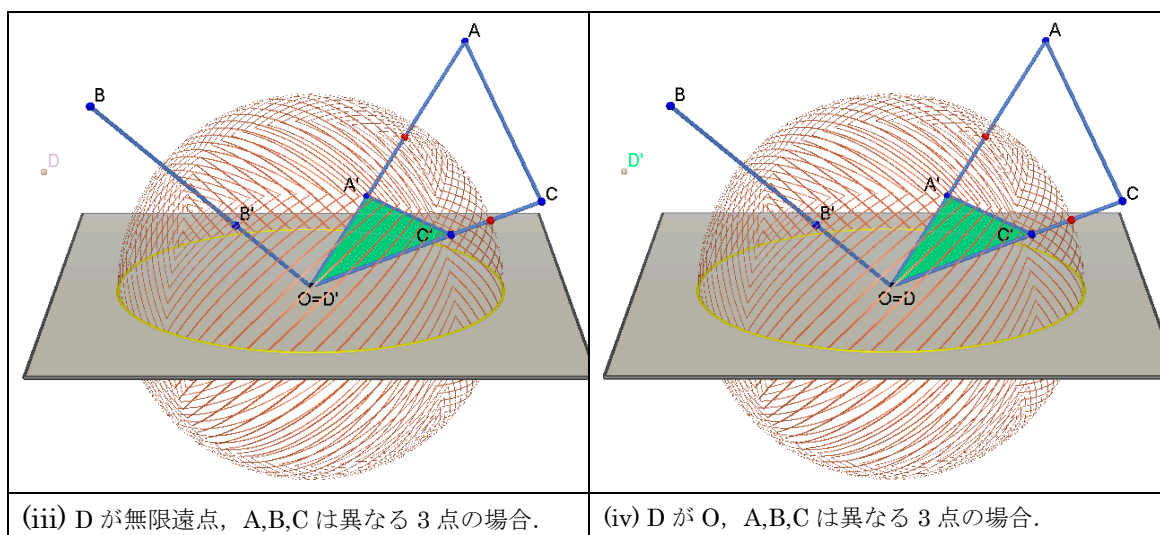
$$[A, B|C, D] = \frac{AC \times BD}{BC \times AD} = \frac{AC}{BC}$$

一方, $D' = O$ となるので,

$$[A', B'|C', D'] = [A', B'|C', O] = \frac{A'C' \times OB'}{OA' \times B'C'} = \frac{A'C'}{AC} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{OB'}{OA'} = \frac{OA'}{OC} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{OC}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OA'} = \frac{AC}{BC}$$

故に, この場合も

$$[A', B'|C', D'] = [A, B|C, D]$$



(iii) D が無限遠点, A, B, C は異なる 3 点の場合.

(iv) D が O , A, B, C は異なる 3 点の場合.

(iv) D が O , A, B, C は異なる 3 点の場合.

$D=O$ の時は, D' が無限遠点になり (iii)の逆 になります. よって(iii)と同様に成り立ちます.

以上より, 何れの場合も 複比は, 球に関する鏡像によって変わりません.

Q.E.D.

なお, 以上の性質は 4 点 A, B, C, D が同一平面上にあるときでも成り立ちます. この場合は, 「球に関する鏡像」は「円に関する鏡像」と同じになります. 次の節では このような複比を使います.

Cabri による検証 (複比と鏡像変換)

A, B, C, D を Drag しも, 複比は変わりません. doubleRatio&inverse.html