

5. 「複比」と「双曲的長さ」

クラインモデルでは、「微分」を使って角度や長さを表すと、非常に複雑になりましたが、「複比」を使うと非常に簡単に表せます。ポアンカレ上半平面、上半球面、ポアンカレ円盤、などのモデルも複比を使って「双曲的長さ」と「双曲的角度」を表すことができます。

なお、4点 A,B,C,D の複比は $[A,B|C,D]=\frac{AC \times BD}{AD \times BC}$ で定義されます。

球または円に関する鏡像変換で複比の値は変わりません。(第4節)

また、直線 UV や直線 XY は それぞれ無限遠点 U,V と X,Y を持つ双曲的直線とします。

5-1. ポアンカレ上半平面(H⁺)における 双曲的長さ

(ア) A(α), B(β) が、実軸に垂直な直線 UV 上にあるとき、

A と B の双曲的距離は、A の方が B より上にある時、

$$[A,B]=\int_{UB}^{UA} \frac{dy}{y} = [\log y]_{UB}^{UA} = \log \frac{UA}{UB}$$

B の方が A より上にある時も含めて、

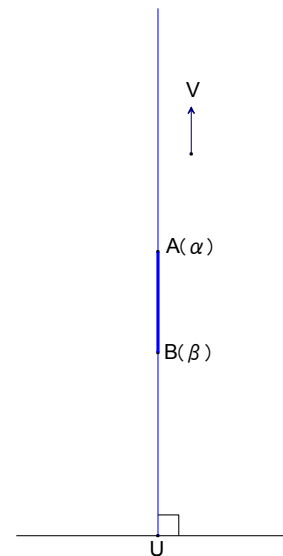
$$[A,B]=\left| \log \frac{AU}{BU} \right| \quad \dots \textcircled{1}$$

一方、V はユークリッド平面でも無限遠点だから、複比(4-1)は、

$$[A,B|U,V]=\frac{AU \times BV}{AV \times BU} = \frac{AU}{BU} \quad \dots \textcircled{2}$$

①,②より、

$$[A,B]=\left| \log([A,B|U,V]) \right| \quad \dots (*)$$



【注】「 $[A,B|V,U]=\frac{1}{[A,B|U,V]}$ 」だから、U と V を取り変えても、右辺の値は変わりません。

また、4-1 より $|\log([U,V|A,B])|$, $|\log([B,A|U,V])|$, $|\log([U,V|B,A])|$ などとも同じ値です。
 $\{A,B\}$ と $\{U,V\}$ の 2 組に分かれていれば大丈夫です。($|\log([U,A|V,B])|$ などは駄目です.)

(イ) A, B が、一般の双曲的直線 UV 上にある時

V が中心で点 A を通る円（緑色の円）に関する鏡像変換 f により、直線 UV は、実軸と直交する直線に移り、 V は虚軸上方向の無限遠点 V' へ移ります。 f は複比を保存するので、

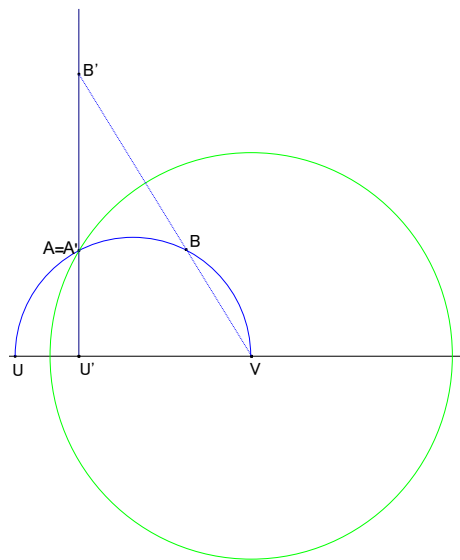
$$[A, B|U, V] = [A', B'|U', V']$$

f はポアンカレ上半平面の合同変換でもあるから、

$$[A, B] = [A', B']$$

故に (ア)の(*)より、

$$\begin{aligned} [A, B] &= [A', B'] \\ &= \left| \log([A', B'|U', V']) \right| \\ &= \left| \log([A, B|U, V]) \right| \end{aligned}$$



(ア),(イ)より、何れの場合も、ポアンカレ上半平面の2点 A, B の双曲的距離は、

$$[A, B] = \left| \log([A, B|U, V]) \right| = \left| \log \left(\frac{AU \times BV}{AV \times BU} \right) \right| \quad \dots(*)$$

となります。ただし、 A, B は双曲的直線 UV の点です。

Cabri による検証(H⁺)

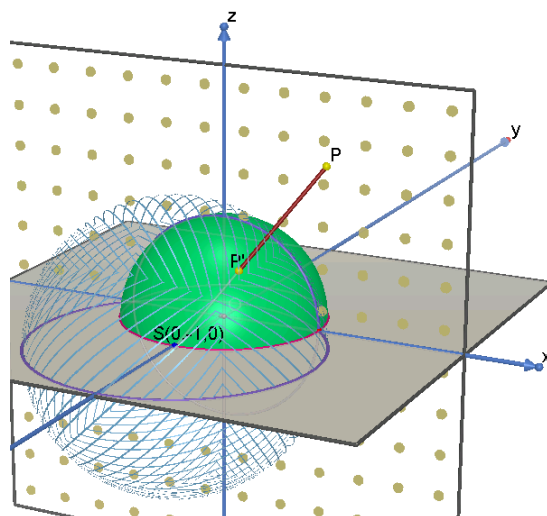
A', B', U', V' は、それぞれ A, B, U, V の円 C に関する鏡像です。 A, B, U, V, C を Drag して下さい。

[doubleRatio&distance_on_H+.html](#)

5-2. 上半球面 における 双曲的長さ.

xyz 空間内に, 上半平面 H^+ を, x 軸が無限遠直線, z 軸が上になるようにして作ります. O が中心の単位球 Ω と点 $S(0,-1,0)$ を取り, 「 S が中心で 半径 $\sqrt{2}$ の球に関する鏡像」を f とします. f によって H^+ 上の点 P は, 単位球 Ω 上の点 P' へ移ります.

stereo_projection.html (by Cabri3D)



f は上半空間 H^3 の合同変換なので, H^+ 上の 2 点 A, B の f による像を A', B' とすると,

5-1 より,

$$[A', B'] = [A, B] = |\log([A, B|U, V])|$$

(但し, A, B は直線 UV 上の点)

一方 f は複比を保存するので, (4-2) f による U, V の像を U', V' とすると,

$$|\log([A, B|U, V])| = |\log([A', B'|U', V'])|$$

ゆえに,

$$[A', B'] = |\log([A', B'|U', V'])|$$

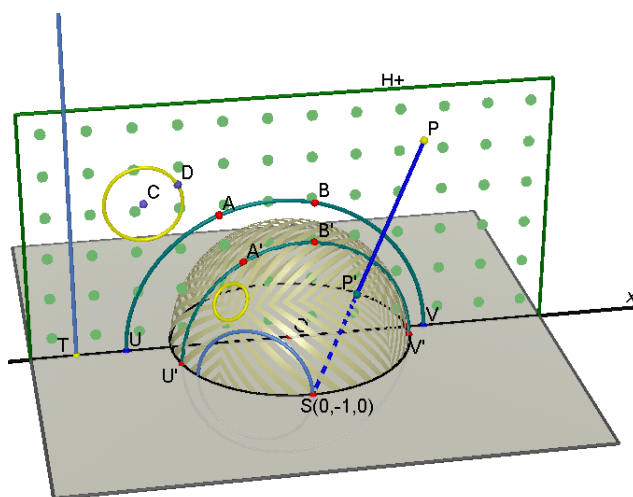
上半球面内の 2 点 A', B' を改めて A, B とおくと, 上半球面内の 2 点 A, B の双曲的距離も,

$$[A, B] = |\log([A, B|U, V])| = \left| \log \left(\frac{AU \times BV}{AV \times BU} \right) \right| \quad \dots (*)$$

で計算できます. (但し, A, B は直線 UV 上の点)

Cabri による検証(上半球面)

H^+ 内の半直線 S (水色), 半円 $UABV$ (緑), 円 C (黄) は, それぞれ H^+ 内の双曲的直線, 双曲的直線, 双曲的円です. これらを S を中心とする立体射影 f で写した図形は, 同じ色で表しています. S, U, V, C, D, A, B, P を Drag して下さい. H+&SphereModel.html



5-3. ポアンカレ円盤における 双曲的長さ.

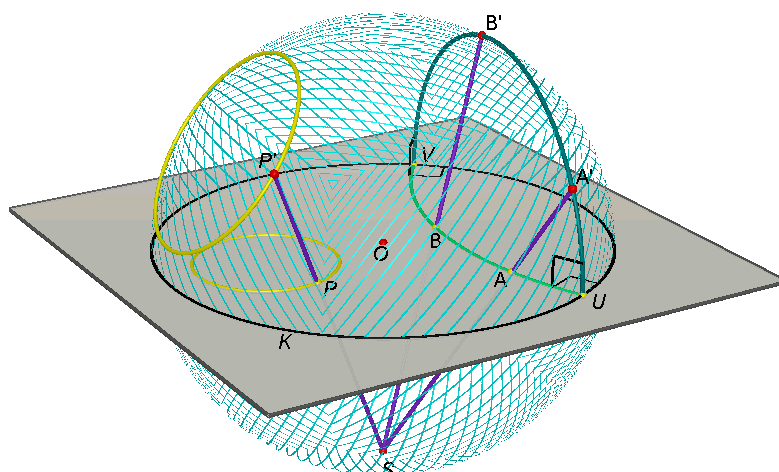
ポアンカレ円盤は、半球面モデルを南極 $S(0,0,-1)$ が中心の立体射影 g で移して得られ、かつこの立体射影は、「点 S を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球に関する鏡像変換」と同じです。
(半球面モデル 2-3)

ポアンカレ円盤上の2点を A, B , g による像を A', B' とすると, g は複比を保存するので,

$$[A, B|U, V] = [A', B'|U', V']$$

ただし, A, B は直線 UV 上の点とします. 定義より $[A, B] = [A', B']$ だから, 5-2の(*)から,

$$[A, B] = [A', B'] = \left| \log([A', B'|U', V']) \right| = \left| \log([A, B|U, V]) \right|$$



故に, ポアンカレ円盤内の2点 A, B の双曲的距離も,

$$[A, B] = \left| \log([A, B|U, V]) \right| = \left| \log \left(\frac{AU \times BV}{AV \times BU} \right) \right| \quad \dots(*)$$

Cabri による検証 (ポアンカレ円盤)

- 上の図形です. A, B, P を drag して下さい. disk&sphereModel.html
- H^+ 上の図形を 5-2 の f で半球面に移し, さらに g でポアンカレ円盤に移したものです. A, B, C, D, P, U, V, T を drag して下さい. H+&sphere&diskModel.html

5-4. クラインモデルにおける 双曲的長さ.

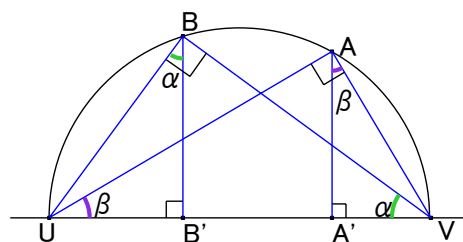
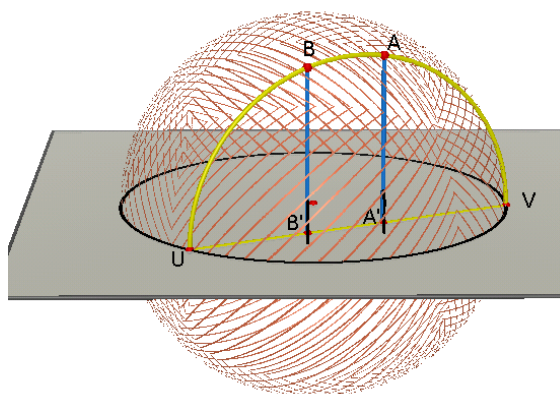
クラインモデルの場合は 定数倍だけ違います.

半球面上で双曲的直線 UV 上の 2 点を A, B , その xy 平面への正射影をそれぞれ A', B' , 「 $\angle UVB = \angle VAA' = \alpha$, $\angle VUA = \angle UBB' = \beta$ 」 とします. このとき,

$$\begin{cases} A'U = AU \cdot \cos \beta \\ A'V = AV \cdot \sin \beta \\ B'U = BU \cdot \sin \alpha \\ B'V = BV \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned} [A', B' | U, V] &= \frac{A'U \times B'V}{A'V \times B'U} \\ &= \frac{AU \cos \beta \cdot BV \cos \alpha}{AV \sin \beta \cdot BU \sin \alpha} \\ &= \frac{AU}{AV} \cdot \frac{1}{\tan \beta} \cdot \frac{BV}{BU} \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \\ &= \frac{AU}{AV} \cdot \frac{AU}{AV} \cdot \frac{BV}{BU} \cdot \frac{BV}{BU} \\ &= \left(\frac{AU \cdot BV}{AV \cdot BU} \right)^2 \\ &= ([A, B | U, V])^2 \end{aligned}$$

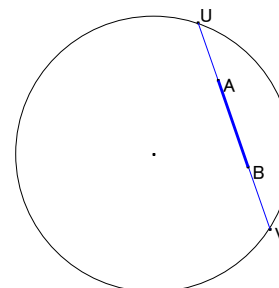


定義より, A' と B' の双曲的距離は, A と B の双曲的距離と等しいから,

$$[A', B'] = [A, B] = \left| \log([A, B | U, V]) \right| = \left| \log(\sqrt{[A', B' | U', V']}) \right| = \frac{1}{2} \left| \log([A', B' | U', V']) \right|$$

以上から, クラインモデル上の 2 点 A', B' を改めて A, B とおくと, クラインモデル上で 双曲的直線 UV 上にある 2 点 A, B の双曲的距離は,

$$\boxed{[A, B] = \frac{1}{2} \left| \log([A, B | U, V]) \right| = \frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{AU \times BV}{AV \times BU} \right) \right| \dots (**)}$$



Cabri II による検証. (クラインモデル)

- 線分 UV を含み xy 平面に垂直な平面による断面です. $\overline{UV}=1$ としています.

[KleinModel&doubleRatio.html](#)

- クラインモデルで, 線分 AB の距離[A,B]です. [kleinModel.html](#)

5-5. まとめ

以上から ポアンカレ上半平面(H^+), 半球面モデル, ポアンカレ円盤に於いて, 直線 UV 上の 2 点 A,B の双曲的距離は,

$$[A,B]=|\log([A,B|U,V])|=\left|\log\left(\frac{AU \times BV}{AV \times BU}\right)\right| \quad \dots(*)$$

クラインモデルでは,

$$[A,B]=\frac{1}{2}|\log([A,B|U,V])|=\frac{1}{2}\left|\log\left(\frac{AU \times BV}{AV \times BU}\right)\right| \quad \dots(**)$$

H^+ , 半球面モデル, ポアンカレ円盤では 適当な球による鏡像変換で互いに移れましたが, クラインモデルのみは 半球面モデルの正射影となるので 定数倍異なります.

【注】 以上の公式は上半平面での微小距離を「 $ds=\frac{dl}{y}$ (dl はユークリッド的距離)」と定義した場合で,

仮に「 $ds=k \cdot \frac{dl}{y}$ (k は正の実数)」と定めると, ポアンカレ上半平面, ポアンカレ円盤, 上半球面モデルでは

$[A,B]=k|\log([A,B|U,V])|$, クラインモデルでは $[A,B]=\frac{k}{2}|\log([A,B|U,V])|$ となります. (k を任意の正の数に定めても矛盾は生じません.)