6．「複比」と「双曲的角度」

長さと同様に**複比**を使って角度を表すことができます．クラインモデルでは特に有効です．
この節では，「双曲的直線 XY」とは，異なる無限遠点 X,Y を持つ双曲的直線とします．

6-1. ポアンカレ上半平面 における 双曲的角度

(ア) 一方の直線が 実軸に垂直な直線のとき，

上半平面で，実軸と垂直な双曲的直線を XY，O を中心とする半円で定まる双曲的直線を UV とし，点 P において，図の様に交わっているとします．2 直線のなす角を θ とすると，

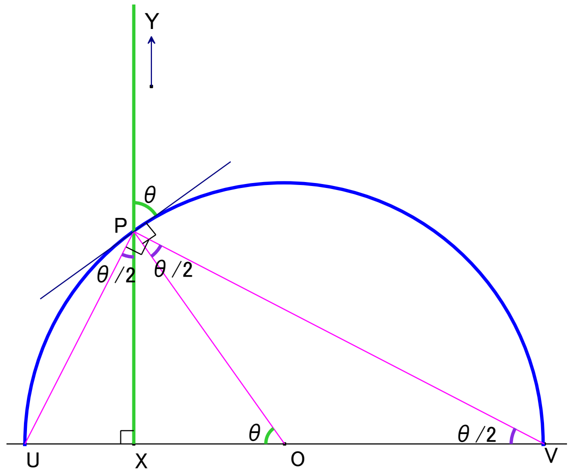
$$\theta = 90^\circ - \angle \mathrm{OPX} = \angle \mathrm{POX}$$

よって，

$$\angle \mathrm{OPV} = \angle \mathrm{OVP} = \angle \mathrm{XPU} = \frac{\theta}{2}$$

すなわち「$\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\mathrm{XP}}{\mathrm{VX}} = \dfrac{\mathrm{XU}}{\mathrm{PX}}$」となるから，

$$\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{XP}}{\mathrm{VX}}\cdot\frac{\mathrm{XU}}{\mathrm{PX}} = \frac{\mathrm{XU}}{\mathrm{XV}} \qquad \cdots ①$$



一方，Y はユークリッド平面でも無限遠点であるから，

$$[\mathrm{X,Y|U,V}] = \frac{\mathrm{XU}\times\mathrm{YV}}{\mathrm{XV}\times\mathrm{YU}} = \frac{\mathrm{XU}}{\mathrm{XV}} \qquad \cdots ②$$

①,②より，

$$\boxed{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = [\mathrm{X,Y|U,V}] \qquad \cdots (*)}$$

【注】「$[\mathrm{X,Y|V,U}] = \dfrac{1}{[\mathrm{X,Y|U,V}]}$」だから，U と V を取り替えると，$[\mathrm{X,Y|V,U}] = \dfrac{1}{\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$ $\cdots ③$

となり，逆数になってしまいます．ところが，θ の補角：「$\theta' = 180^\circ - \theta$」をとると，

$$\tan\frac{\theta'}{2} = \tan\frac{180^\circ - \theta}{2} = \tan\left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

よって，③は「 $[\mathrm{X,Y|V,U}] = \left(\tan\dfrac{\theta'}{2}\right)^2$ 」を表しています．

通常，二直線のなす角をθとすると「$0^\circ \le \theta \le 90^\circ$」ですが，$\theta$だけでなく，その補角$(180^\circ - \theta)$も二直線のなす角とします．すると[X,Y|U,V]を [U,V|X,Y],[X,Y|V,U],[V,U|Y,X]などで置き換えても，2直線のなす角を表すことができます．結局{X,Y}と{U,V}の2組に分かれていれば大丈夫です．（[U,X|V,Y]などは駄目です.）

(イ) 一般の2直線のとき

一般の双曲的直線 UV と XY でも，「Y が中心の円（点線）に関する鏡像変換f」により，Y は虚軸上方向の無限遠点 Y' へ移り，直線 XY は，実軸と直交する直線 X'Y'に移ります．直線 UV と XY のなす角をθ，直線 U'V'と X'Y'のなす角をθ'とします．

fは複比を保存するので，

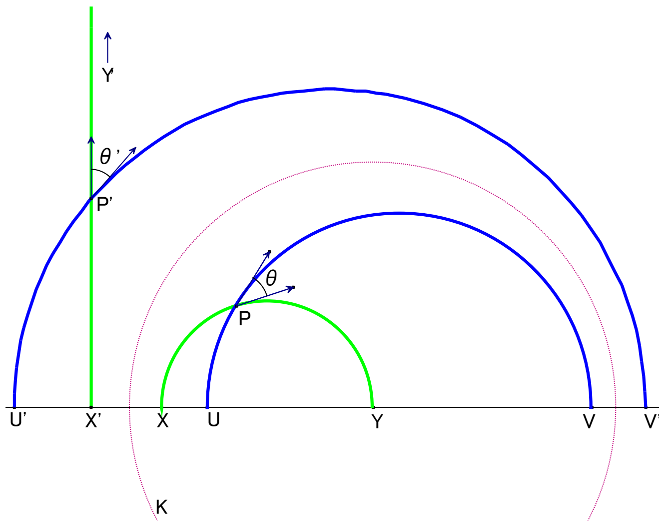
[X,Y|U,V]=[X',Y'|U',V']

fは角度を保存するので，

$$\theta=\theta'$$

従って，

$$\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = \left(\tan\frac{\theta'}{2}\right)^2 = [X',Y'|U',V'] = [X,Y|U,V]$$



(ア),(イ)より，いずれの場合も，2直線 XY と UV のなす角をθとすると，

$$\boxed{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = [X,Y|U,V] \qquad \cdots(*)}$$

ただし「$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$」とし，$\theta$でも（$180^\circ - \theta$）でも OK とします．（例えば「2直線のなす角を 60° と言っても，120° と言っても良い」とします.）なお，(*)の式は，

$$\boxed{\theta = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{[X,Y|U,V]}\right)\cdots(**)}$$

と書き直せます．

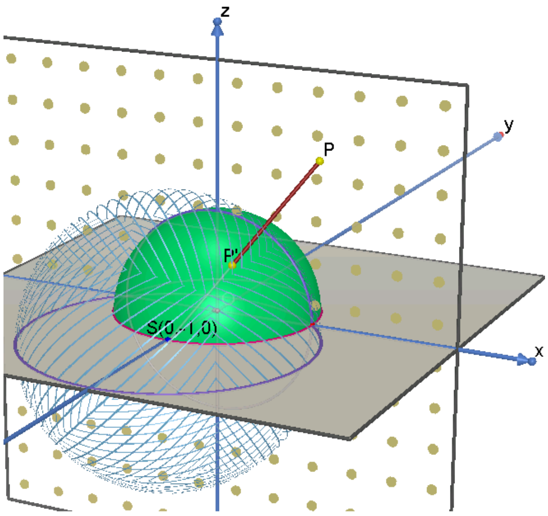
Cabri による検証(H+)

X,Y,U,V を Drag して下さい．　　　　angle_on_H+.html

6-2. 上半球面における 双曲的角度.

xyz 空間内に，上半平面 H^+ を，x 軸が無限遠直線，z 軸が上になるようにして作ります．原点が中心の単位球 Ω と点 $S(0,-1,0)$ をとり「S が中心で 半径 $\sqrt{2}$ の球に関する鏡像」を f とします． f によって H^+ 上の任意の点 P は，単位球 Ω 上の点 P' へ移ります．

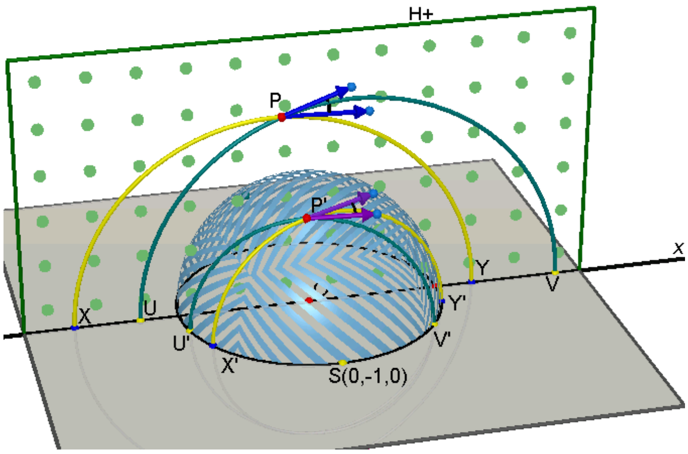
stereo_projection.html (by Cabri3D)



双曲的直線 UV と XY のなす角を θ，双曲的直線 U'V' と X'Y' のなす角を θ' とします．

6-1 より，

$$\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = [X,Y|U,V]$$



鏡像変換は角度を保存するので，

$$\theta = \theta'$$

f は複比を保存するので，

$$[X,Y|U,V] = [X',Y'|U',V']$$

ゆえに，

$$\left(\tan\frac{\theta'}{2}\right)^2 = [X',Y'|U',V']$$

上半球面内の 2 直線 X'Y' , U'V' を改めて XY, UV とおくと, 2 直線 XY と UV のなす角 θ も,

$$\boxed{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = [X,Y|U,V] \qquad \cdots(*)}$$

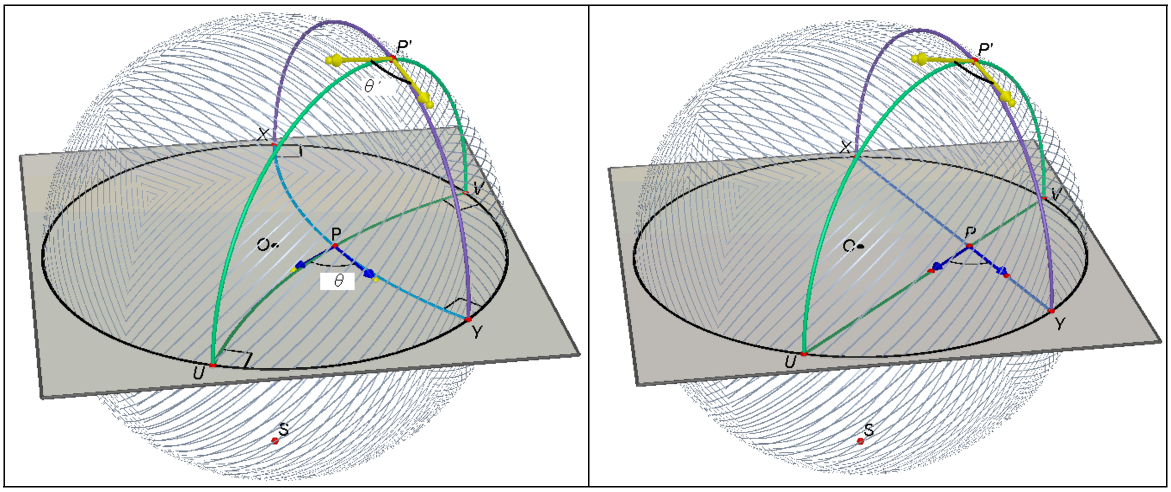
で計算できます．

Cabri II による検証(半球面モデル)

H^+ 内の双曲的直線 UV, XY を f で写した図形が，半球面上の双曲的直線 U'V' と X'Y' です．

X,Y,U,V,P を drag して下さい． Angle_on_sphereModel.html

6-3. 「ポアンカレ円盤」,「クラインモデル」の 双曲的角度.



「ポアンカレ円盤やクラインモデル上の 2 直線 XY と UV のなす角 θ 」は, 定義より「半球面モデル上の 2 直線 XY と UV のなす角」と等しく，かつ **無限遠点 X,Y,U,V は 半球面モデルと全く同一** なので，やはり(*)が成り立ちます.

$$\boxed{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = [\mathrm{X,Y|U,V}] \qquad \cdots(*)}$$

Cabri による検証(ポアンカレ円盤&クラインモデル)

X,Y,U,V を drag して下さい.

- クラインモデル　　angle_on_kleinModel.html
- ポアンカレ円盤　　angle_on_poincareDisk.html

6-5. まとめ

以上より, ポアンカレ上半平面(H+), 半球面モデル, ポアンカレ円盤, クラインモデルでは, 双曲的直線 XY と UV（但し X,Y,U,V は直線の端点）のなす角を θ とすると,

$$\boxed{\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 = [\mathrm{X,Y|U,V}] \iff \theta = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{[\mathrm{X,Y|U,V}]}\right)}$$

ただし「$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$」とし，$\theta$ でも（$180^\circ - \theta$）でも OK とします.