

## 7. 様々な複比

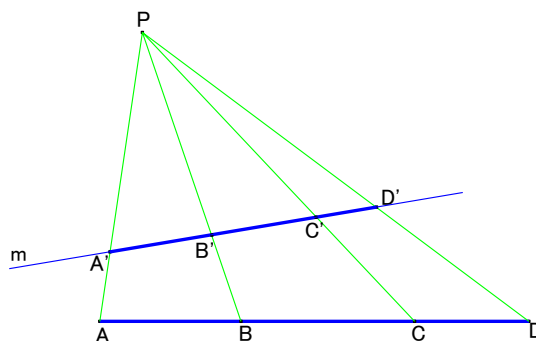
空間内の4点の複比(第4節)以外にも さまざまな複比があります. なお, この節では, 直線, 角, 長さなどは 全てユークリッド的とします. この節は「幾何再入門」を参考にしました.

### (ア). 同一直線上の4点の複比

同一直線上に4点 A,B,C,D (少なくとも3点以上は異なるとします) があるとき, A,B,C,D の複比を, 4-1 と全く同様な式で定めます. すなわち,

$$[A,B|C,D] = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}} = \frac{AC \times BD}{AD \times BC}$$

この複比は「射影変換によって不変」です.



**【証明】** 直線 AB 上に無い点 P を取り, P から任意の直線  $m$  の上への射影変換を  $f$ ,  $f$  による点 A,B,C,D の像をそれぞれ  $A',B',C',D'$  とすると,

$$\frac{A'C'}{A'D'} = \frac{\triangle A'PC'}{\triangle A'PD'} = \frac{PA' \times PC' \times \sin \angle A'PC'}{PA' \times PD' \times \sin \angle A'PD'} = \frac{PC' \times \sin \angle A'PC'}{PD' \times \sin \angle A'PD'} \quad \dots \textcircled{1}$$

同様に,

$$\frac{B'C'}{B'D'} = \frac{\triangle B'PC'}{\triangle B'PD'} = \frac{PB' \times PC' \times \sin \angle B'PC'}{PB' \times PD' \times \sin \angle B'PD'} = \frac{PC' \times \sin \angle B'PC'}{PD' \times \sin \angle B'PD'} \quad \dots \textcircled{2}$$

①,②より,

$$[A',B'|C',D'] = \frac{\frac{A'C'}{B'C'}}{\frac{A'D'}{B'D'}} = \frac{\frac{PC' \times \sin \angle A'PC'}{PD' \times \sin \angle A'PD'}}{\frac{PC' \times \sin \angle B'PC'}{PD' \times \sin \angle B'PD'}} = \frac{\frac{\sin \angle A'PC'}{\sin \angle A'PD'}}{\frac{\sin \angle B'PC'}{\sin \angle B'PD'}} = \frac{\frac{\sin \angle APC}{\sin \angle APD}}{\frac{\sin \angle BPC}{\sin \angle BPD}} = [A,B|C,D]$$

Cabri による検証 (同一直線上の4点の複比)

P,A',D'を Drag して下さい.

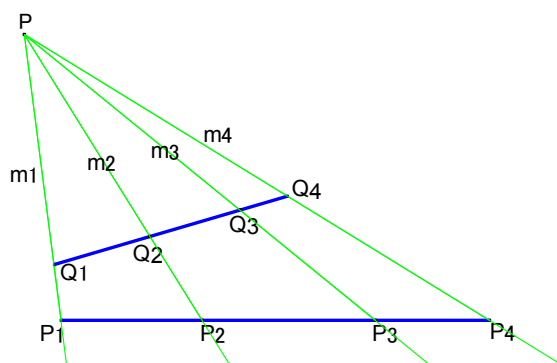
[CrossRatio on line.html](#)

## (イ).直線束の複比

一点 P を通る 4 本の直線  $m_1, m_2, m_3, m_4$  があり, 直線  $n$  とそれぞれ  $P_1, P_2, P_3, P_4$  で交わっているとします. この, P から出ている直線束(pencil)の複比を,

$$[m_1, m_2 | m_3, m_4] \equiv [P_1, P_2 | P_3, P_4] = \frac{\overline{P_1 P_4} \times \overline{P_2 P_3}}{\overline{P_1 P_3} \times \overline{P_2 P_4}}$$

で定めます. (ア)より, この値は  $n$  の取り方には抛りません. 図の  $P_1, P_2, P_3, P_4$  の代わりに,  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  等を取っても同じです.



### Cabri による検証 (直線束の複比)

点  $P_1, P_4$  を drag すると直線  $n$  が変わります. 直線  $PP_1, PP_2, PP_3, PP_4$  は 直接つまんで drag してください.

[CrossRatio on pencil.html](#)

以後, 複比を次のように定めます.

A, B, C, D が「点」(一直線上でなくても良い) のとき,

$$[A, B | C, D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{\overline{AD} \times \overline{BC}}$$

$m_1, m_2, m_3, m_4$  が, 点 P から出ている「直線束(pencil)」のとき,

$$[m_1, m_2 | m_3, m_4] \equiv [P_1, P_2 | P_3, P_4] = \frac{\overline{P_1 P_4} \times \overline{P_2 P_3}}{\overline{P_1 P_3} \times \overline{P_2 P_4}}$$

(但し  $P_1, P_2, P_3, P_4$  は, 直線束と P を通らない任意の直線  $n$  の交点)

「点の複比」の値は, 「球や円に関する鏡像変換」によって変わりません. また 4 点が一直線上にあるときは, 「射影変換」によっても変わりません.

### (ウ). 同一円周上の 4 点の複比

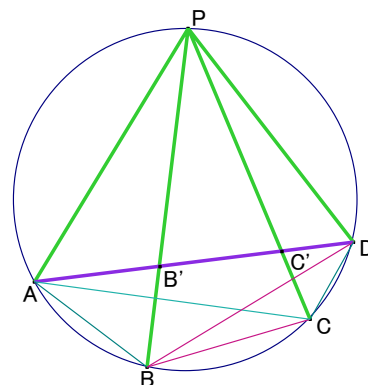
A,B,C,D,P が同一円周にあるとき, 弦 AD と線分 PB, PC の交点をそれぞれ B', C' とすると,

$$[A,B|C,D] = \frac{AC \times BD}{AD \times BC} \quad \text{と} \quad [A,B'|C',D] = \frac{AC' \times B'D}{AD \times B'C'} \quad \text{は等しい.}$$

すなわち, A,B,C,D,P が同一円周にある時,

$$[A,B|C,D] = [PA,PB|PC,PD] \dots \textcircled{1}$$

左辺は「4 点の複比」で, 右辺は「直線束の複比」です.



**【証明】** (ア) と同様に,

$$\begin{aligned} [A,B'|C',D] &= \frac{AC' \times B'D}{AD \times B'C'} \\ &= \frac{\triangle APC' \times \triangle B'PD}{\triangle APD \times \triangle B'PC'} \\ &= \frac{PA \cdot PC' \sin \angle APC' \times PB' \cdot PD \sin \angle B'PD}{PA \cdot PD \sin \angle APD \times PB' \cdot PC' \sin \angle B'PC'} \\ &= \frac{\sin \angle APC' \times \sin \angle B'PD}{\sin \angle APD \times \sin \angle B'PC'} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

円の半径を R とします.  $\triangle APC, \triangle APD, \triangle BPC, \triangle BPD$  に「正弦定理」を使って,

$$\begin{cases} \sin \angle APC' = \sin \angle APC = \frac{AC}{2R}, & \sin \angle APD = \frac{AD}{2R}, \\ \sin \angle B'PC' = \sin \angle BPC = \frac{BC}{2R}, & \sin \angle B'PD = \sin \angle BPD = \frac{BD}{2R} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$[A,B'|C',D] = \frac{\sin \angle APC' \times \sin \angle B'PD}{\sin \angle APD \times \sin \angle B'PC'} = \frac{AC \times BD}{AD \times BC} = [A,B|C,D]$$

よって (イ) から,

$$[A,B|C,D] = [PA,PB|PC,PD]$$

### Cabri による検証 (同一円周上の 4 点の複比)

- P は円周上を動きます. A,B,C,D,P を drag して下さい. [CrossRatio on circle1.html](#)
- P は自由に動きます. P が同一円上に無いと ①は成立しません. A,B,C,D,P を drag して下さい. [CrossRatio on circle2.html](#)