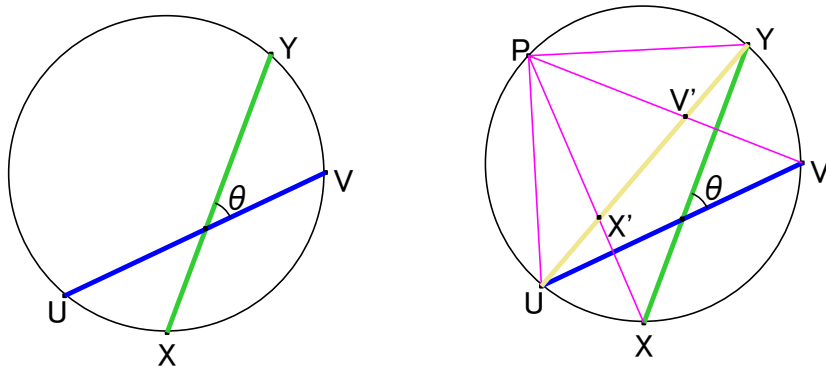


8. 「2次曲線(conic)内のクラインモデル」の角度と距離

「クラインモデルの角度」は、直線束の複比を使っても表せます。楕円、双曲線、放物線などの2次曲線(conic)の上にクラインモデルを作るときは、こちらを使います。

8-1. クラインモデルの角度の「もう一つの定義」



クラインモデル上の2直線XYとUVのなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とすると、6-3より、

$$\left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2 = [X, Y | U, V] = \frac{XU \times YV}{XV \times YU} \quad \dots(*)$$

円上に点Pをとり、線分PX, PVと直線YUの交点を各々X', V' とすると、7節(ウ)より、

$$[X, Y | U, V] = [X', Y | U, V'] = [PX, PY | PU, PV]$$

故に、

$$\left(\tan \frac{\theta}{2}\right)^2 = [PX, PY | PU, PV] \quad \left(= [X', Y | U, V'] = \frac{X'U \times YV'}{X'V' \times YU} \right) \dots(**)$$

右辺は「直線の複比」です。

Cabri による検証 (クラインモデルの角の「もうひとつの定義」)

角の大きさが目で分かるように、半球面モデルと合わせて描いてあります。U, V, X, Y, S を drag して下さい。

[Angle defined by doubleRatio of lines](#)

8-2. 2次曲線内のクラインモデル

8-2-1. 双曲的距離

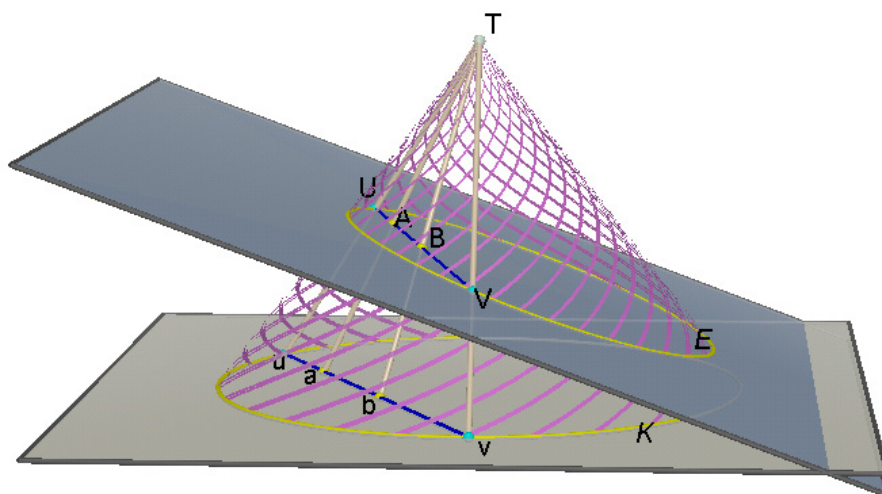
円だけでなく、2次曲線（楕円，放物線，双曲線）の中に「クラインモデル」を作ることができます。2次曲線は、円錐を適当な平面で切った切り口と一致します。円錐の頂点を T 、底円を K とし、適当な平面 π による切り口を E 、 K 内の双曲的直線を uv （ u,v は無限遠点）、 uv 上の2点を a,b として、 u,v,a,b を T から π への射影で移した点を U,V,A,B とします。このとき、2点 A,B の双曲的距離を、

$$[A,B] = \frac{1}{2} \log([A,B|U,V]) \quad \dots(\#)$$
$$\text{但し } [A,B|U,V] = \frac{AU \times BV}{AV \times BU}$$

で定義すると、7節(ア)より、 T からの射影変換で複比は変わらないので、

$$[A,B|U,V] = [a,b|u,v]$$

したがって2次曲線 E 内の2点 A,B の双曲的距離は (#)で定義できます。



Cabri による検証（射影クラインモデルの長さ）

a,b,u,v と P,Q,R,T を drag して下さい。平面 PQR が変わっても複比は変わりません。

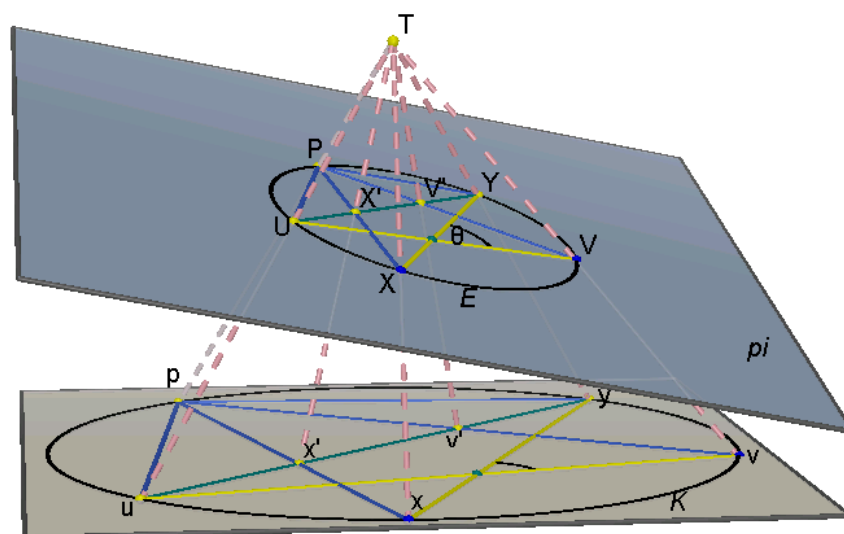
[Distance on KleinModel.html](#)

8-2-2. 双曲的角度

K 内の2つの双曲的直線 uv と xy が交わっているとき, K 上に適当な点 p をとり, u,v,x,y,p を T から π への射影で移した点を U,V, X,Y,P とします. さらに 双曲的2直線 XY と UV の双曲的角度 θ (下図) を, 8-1 の角度の定義;

$$\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = [PX, PY | PU, PV] \quad \dots (**)$$

で定めます.



7節(ア)より, 射影変換によって直線の複比は保存されるので,

$$[X', Y | U, V'] = [x', y | u, v']$$

7節(ウ)と合わせて,

$$[PX, PY | PU, PV] = [X', Y | U, V'] = [x', y | u, v'] = [px, py | pu, pv]$$

したがって 2次曲線 E 内の 2直線 XY と UV の双曲的角度 θ を, (**) で定義できます.

なお, 円以外の 2次曲線 E に対しては,

$$[X, Y | U, V] \neq [PX, PY | PU, PV]$$

です. したがって, 「 $\left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = [X, Y | U, V]$ 」は 成り立ちません.

Cabri による検証 (射影クラインモデルの角度)

$x, y, u, v, p, A, B, C, T$ は drag できます. A, B, C は平面 π を定めます. A, B, C を動かしても θ は変わりません. Angles_on_KleinModel.html