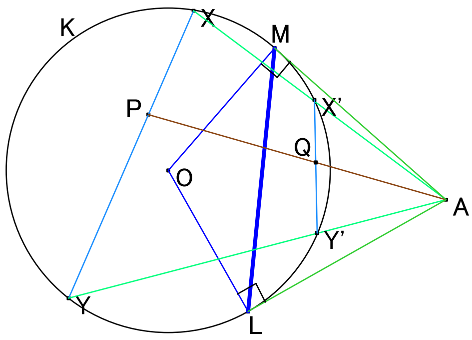
2.　双曲的合同変換と基本図形の作図

2-1．双曲的対称移動（鏡像）

「円 K 上のクラインモデル｣に於いて　双曲的直線ＬＭに関する点Ｐの鏡像を Q とすると，Q の作図は次のようになりました．すなわち，

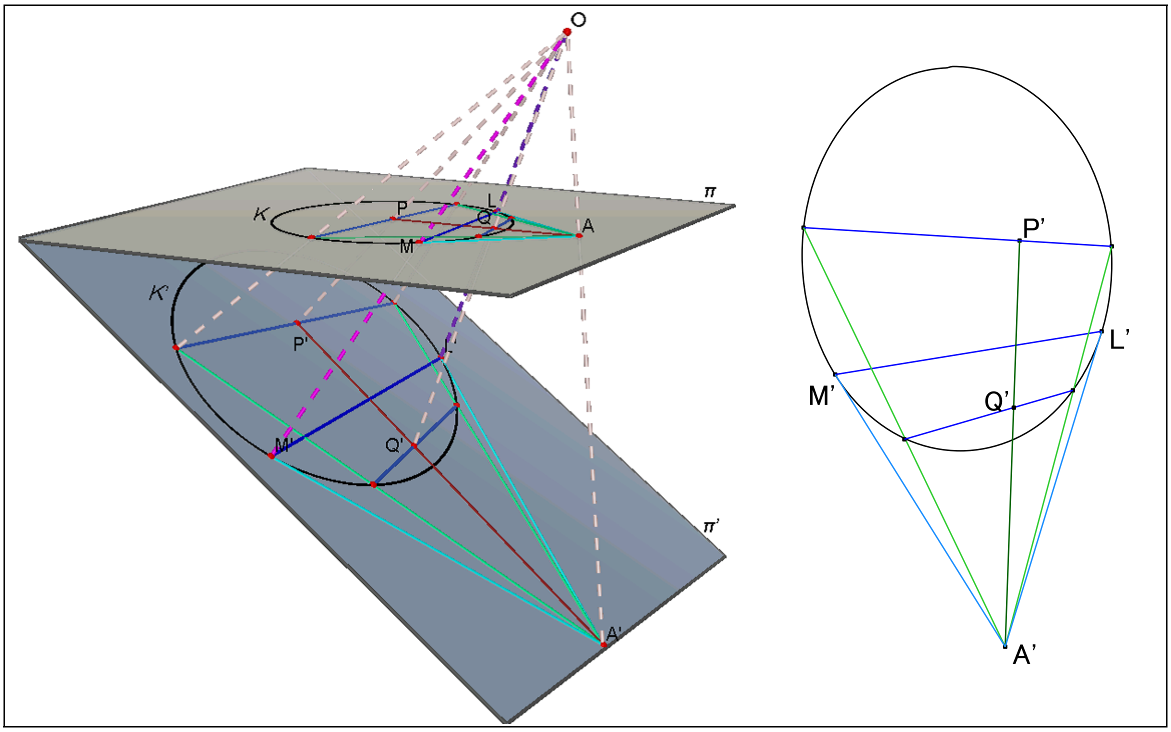
M,N における接線の交点 A を作図します．次に P を通る直線 XY に対し, 直線 AX, AY と K の交点 X’, Y’ をとります．　すると　直線 AP と直線 X’Y’の交点がＱとなります．…(*)

直線 XY に，P を通るどのような直線を取っても，Q の位置は変わりません．　mirror_in_circle.html

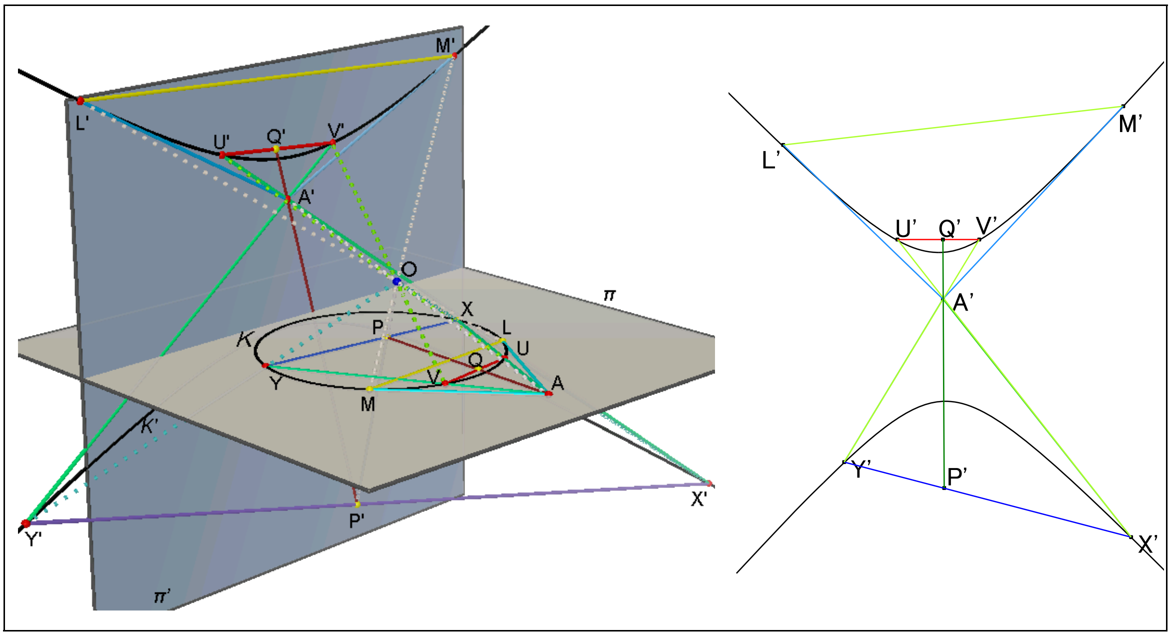


円 K が π 上にある時，π 外の１点 O から，平面 π' に射影することにより, 2 次曲線 K'内の「射影クラインモデル」ができます．射影により直線は直線に移るので,「射影クラインモデル」に於いても，(*)によって鏡像点を作図することができます．

下の例で，P と Q は双曲的直線 ML に関し，双曲的対称となっています．（K'は楕円）



K’ が双曲線の時は，P と Q が双曲線に関し異なる領域の中にあることも在ります.



Cabri による検証

(1) K’が楕円の時　　drag L,M,P,X

立体射影　　drag L,M,P,X　　mirror_in_ellipse(3G).html,

平面上で射影　　drag L’,M’,P’,X’　　mirror_in_ellipse.html

(2) K’が双曲線の時

立体射影　　drag L,M,P,X　　mirror_in_hyperbolic(3G).html(線分表示)

平面上で射影　　drag L’,M’,P’,X’

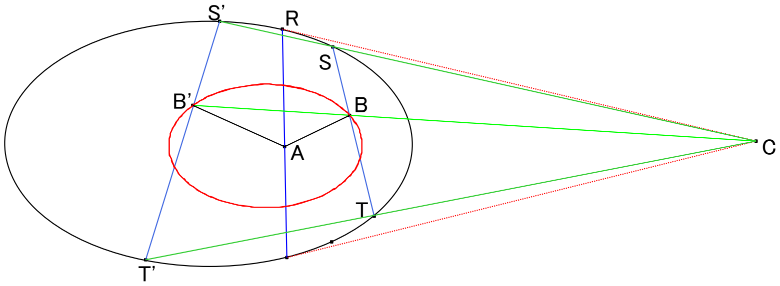
mirror_in_hyperbolic1.html(線分表示),　　mirror_in_hyperbolic2.html（直線表示）

【注】K’が双曲線のときは，「双曲的直線は，線分または 2 本の半直線になる」ので，上の図でも例えば線分 UV は，点 P,L,M などの位置に応じて「線分」と「半直線」が切り替わるべきです．しかしプログラムが複雑になるので，「線分」か「直線」のどちらか一方だけを表示するようにしています．

2．双曲的円，極限円，等距離線の作図

2-1．双曲的円の作図

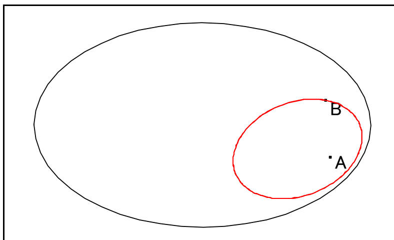
「点 A が中心で, 点 B を通る双曲的円」を **双曲的対称移動(鏡像)** を利用して作図します.
2 次曲線 K 上に自由点 R を取り，双曲的直線 AR に関する鏡像変換を f，f による B の像を B' とすると，f は A を動かさないので，[A,B]=[A,B']（[A,B]は A と B の双曲的距離)
故に R が単位円上を一周すると, B' の軌跡は A を中心とし B を通る双曲的円となります.

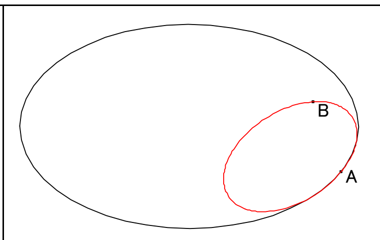


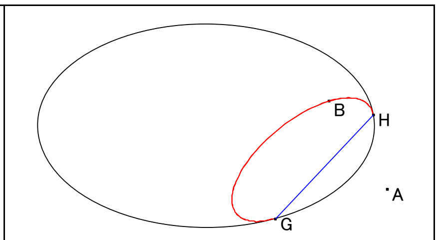
上の図では 無限遠境界 K は楕円ですが，K が双曲線，放物線の時も同様に作図できます.
ただし，K が双曲線の時は，双曲的円は 2 次曲線(楕円，双曲線，放物線)となります.

2-2．極限円，等距離線の作図

まず，点 A が中心で，点 B を通る**双曲的円** C を描きます．次に，点 A を無限円境界 K 上に持って行くと, C は点 B を通る**極限円**になります. さらに, 点 A を K の外部に動かすと, C は点 B を通る**等距離線**となります．すなわち「作図方法は全く同じ」で，　双曲的円，極限円，等距離線の 3 種の基本図形が描けます.（クラインモデルの利点です.）







A が中心で B を通る双曲的円	B を通る極限円	直線ＧＨからの等距離線

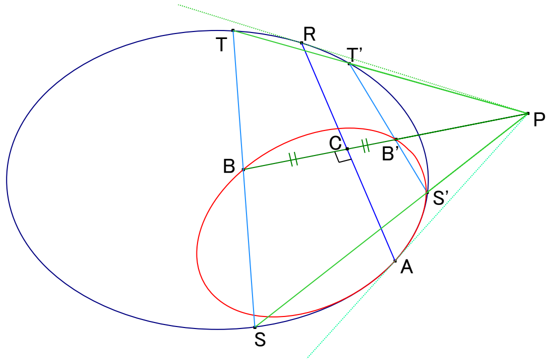
2.3. Cabri による検証（2-1&2-2)

K が楕円の場合です.　A,B,R,S を drag して下さい. (B は**楕円の内部で**動かして下さい.)
objects_draw(in ellipse).html

なお, 双曲的円, 極限円や等距離線**だけ**をご覧になりたい方は 1-2 ,1-3,1-4 をご覧ください.
【注】上記のファイルでは, B が内部にある時のみ描写する様に, 特別にプログラムしています.

2-4. 「極限円の作図(2-2)」の証明

境界 K 上に固定点 A と，動点 R をとり，
直線 AR に関する B の鏡像を B'とします.
ここで R を K 上で「ぐるーっと」廻すと，
B'の軌跡は　点 A で K と接し, 点 B を通る
極限円になります．…(*)



証明

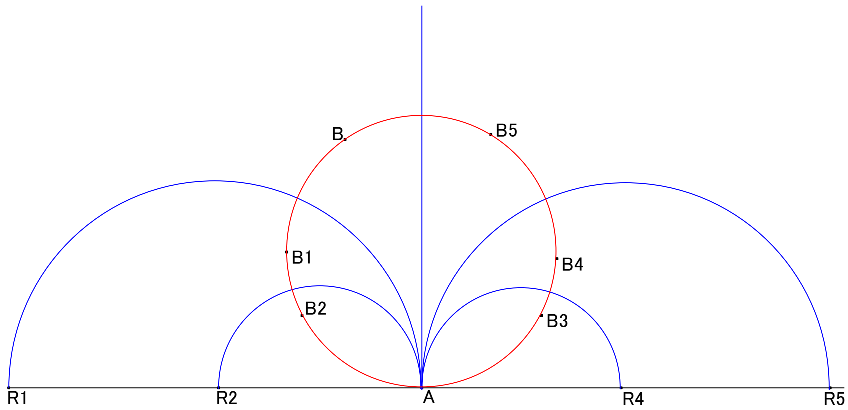
ポアンカレ上半平面(H+)上で，無限遠点 A を共有する互いに平行な双曲的直線の列を

$$AR_1, AR_2, AR_3, \cdots$$

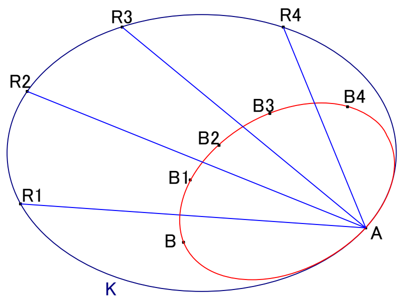
さらに，点 B の $\{AR_k\}$ による鏡像の点列 $\{B_k\}$ を，

$$B \xrightarrow[\text{鏡像}]{AR_1\ \text{に関する}} B_1 \xrightarrow[\text{鏡像}]{AR_2\ \text{に関する}} B_2 \xrightarrow[\text{鏡像}]{AR_3\ \text{に関する}} B_3 \cdots$$

のように定めると，$\{B_k\}$ は　点 A で無限遠境界線と接する極限円の上にあります.（下図）
実は これが「極限円の定義」でした.



同様に，射影クラインモデル上で，無限遠点 A を共有する互いに平行な双曲的直線の列 $\{AR_k\}$ と，
点 B の $\{AR_k\}$ による鏡像の点列 $\{B_k\}$ を定めると，
$\{B_k\}$ は，点 A で K と接する極限円を描きます.



よって, (*)により 極限円が作図できます.（Q.E.D）

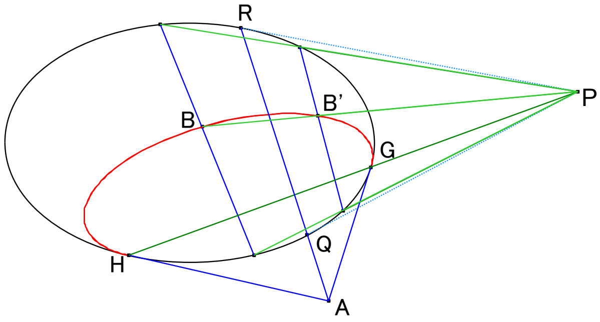
Cabri による検証

Drag　A, B, R_1~R_4　　[draw hori_circle.html]

2-5. 「等距離線の作図(2-2)」の証明

境界 K 外に固定点 A と，動点 R をとり，直線 AR に関する B の鏡像を B'とします．ここで R を K 上で「ぐるーっと」廻すと，B'の軌跡は「点 B を通る 直線 GH からの等距離線」になります． …(*)

(ただし A から K に引いた 2 本の接線と K の接点を G,H とします．)



証明

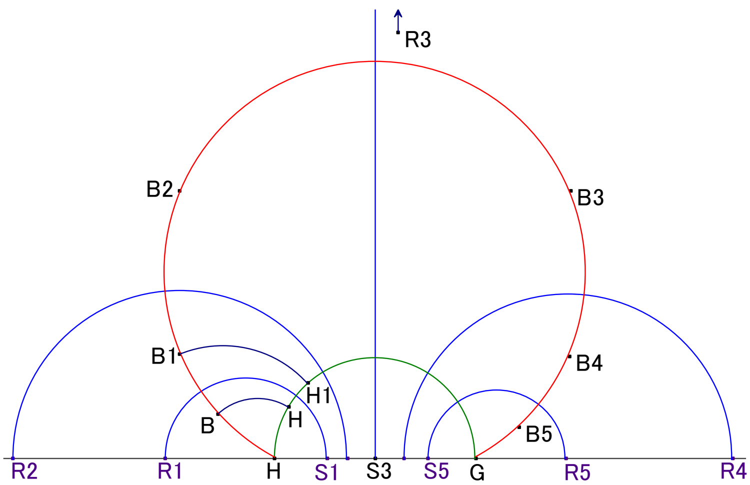
ポアンカレ上半平面(H⁺)上で，双曲的直線 GH と直交する双曲的直線の列を

$$S_1R_1, S_2R_2, S_3R_3, \cdots$$

さらに，点 B の $\{S_kR_k\}$ による鏡像の点列 $\{B_k\}$ を，

$$B \xrightarrow[\text{鏡像}]{S_1R_1\text{ に関する}} B_1 \xrightarrow[\text{鏡像}]{S_2R_2\text{ に関する}} B_2 \xrightarrow[\text{鏡像}]{S_3R_3\text{ に関する}} B_3 \cdots$$

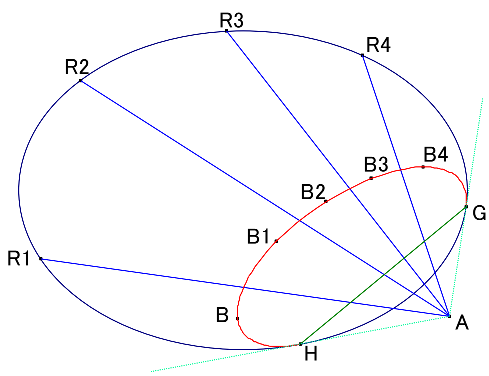
のように定めると，$\{B_k\}$ は「双曲的直線 GH からの等距離線」の上にあります．(下図)
これは B, B_1 から双曲的直線 GH に下ろした垂線の足を H, H_1 としたとき，$[B,H]=[B_1,H_1]$ となることから分かります．



射影クラインモデル上で，K 上に点 R_k を取ると，直線 AR_k は GH と直交します．(次頁【注】参照)

よって，直線の列 $AR_1, AR_2, AR_3, \cdots$ をとって，点 B の $\{AR_k\}$ による鏡像の列 $\{B_k\}$ を定めると，$\{B_k\}$ は「直線 GH からの等距離線」を描きます．

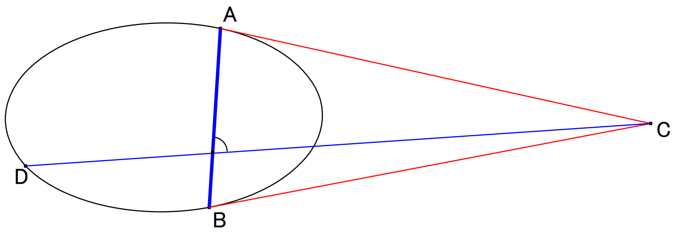
即ち，(*)により等距離線が作図できます．(Q.E.D)



Cabri による検証

Drag　A, B,R_1~R_4　　　　　　　　draw_EquidistanceLine.html

【注】　下図で 2 次曲線 K 上の点を A,B,D. A,B に於ける 2 本の接線の交点を C とすると，双曲的直線 AB と双曲的直線 CD は直交します．（双曲的垂直）



証明

CD 上に点 P をとり，AB に関する鏡像を点 P' とすると，「P と P' は双曲的直線 AB に関して双曲的対称」となるので，角 AMP=90°．よって AB⊥CD