

ポアンカレ Disk

1-1. Möbius-Cailey 変換

ポアンカレ Disk とは、複素平面上で、単位円の内部と周上を指します。ここで Möbius-Cailey 変換:

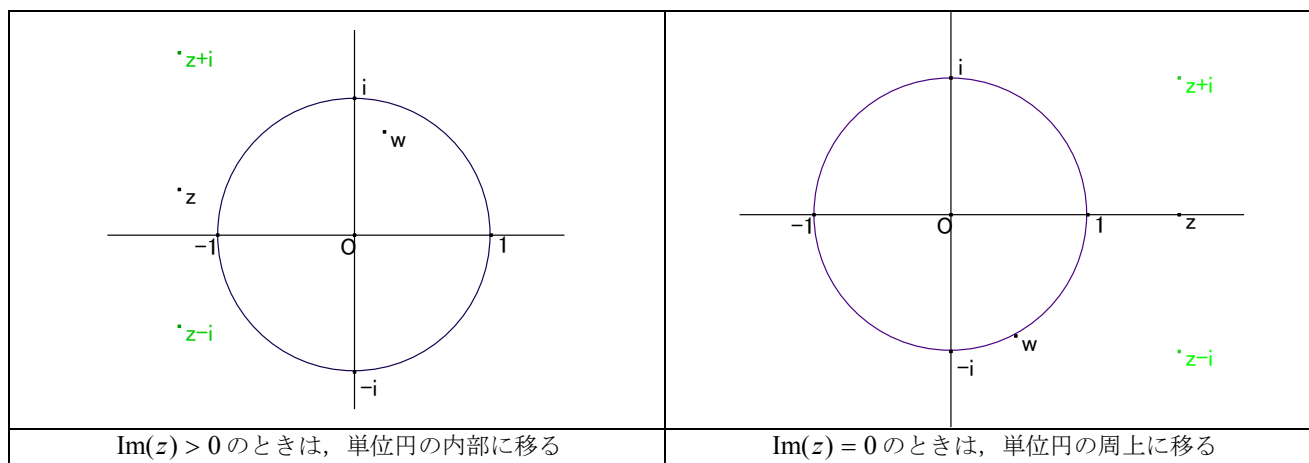
$$f: \omega = \frac{z-i}{z+i}$$

を考えると,

$$z \text{ が上半平面 } (\text{Im}(z) > 0) \text{ にあるとき, } |z-i| < |z-(-i)| \iff \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1.$$

$$z \text{ が実軸上にあるとき, } |z-i| = |z-(-i)| \iff \left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1.$$

ゆえに, f は H^+ 上の点 z を, ポアンカレ Disk 上の点に, 1 対 1 かつ連続に 移します.

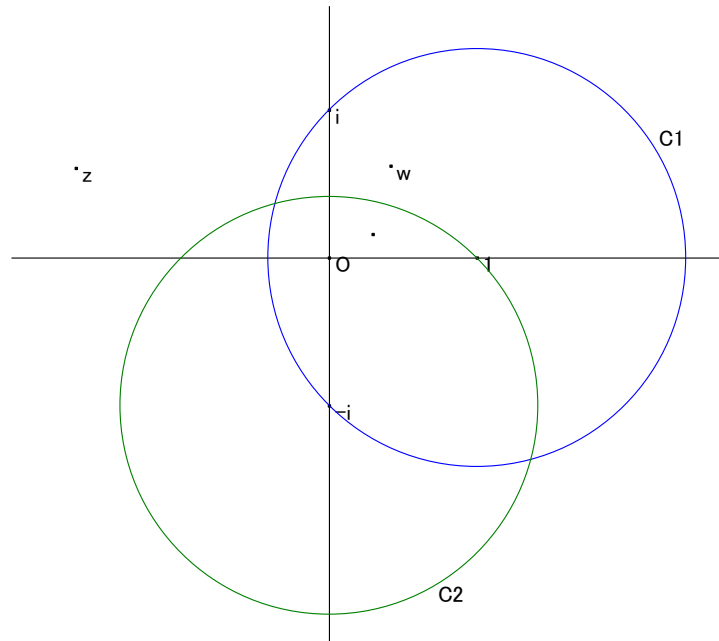


Cabri II による検証

z をつまんで動かしてみてください. mobius0.html

1-2. Möbius-Cailey 変換の合成

Möbius-Cailey 変換 は、2 円に関する鏡像変換の合成で表せます。これを使うと Cabri II などのソフトで簡単に作図ができます。



C_1, C_2 をそれぞれ中心が $1, -i$ で半径が $\sqrt{2}$ の円とします。 C_1, C_2 に関する鏡像変換を f_1, f_2 とすると、

$$f_2 \circ f_1(-i) = f_2(-i) = \infty, \quad f_2 \circ f_1(i) = f_2(i) = 0, \quad f_2 \circ f_1(\infty) = f_2(1) = 1$$

一方、

$$f(-i) = \infty, \quad f(i) = 0, \quad f(\infty) = 1$$

ですから、 $f_2 \circ f_1$ と f は 3 点 ($\pm i$ と ∞) の像が一致し、かつ共に 1 次分数変換なので

$$f = f_2 \circ f_1 \quad (\text{恒等的に一致})$$

【注】 実際に計算で示すことも出来ます。 $z \xrightarrow{f_1} z' \xrightarrow{f_2} \omega$ とすると、

$$\begin{cases} z'-1 = \frac{(\sqrt{2})^2}{z-1} \iff z' = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \\ \omega - (-i) = \frac{(\sqrt{2})^2}{z'-(-i)} \iff \omega = \frac{1-i\bar{z}'}{z'-i} \end{cases}$$

よって、

$$\omega = \frac{1-i \cdot \frac{z+1}{z-1}}{\frac{z+1}{z-1} - i} = \frac{(1-i)z - (1+i)}{(1-i)z + (1+i)} = \frac{z - \frac{1+i}{1-i}}{z + \frac{1+i}{1-i}} = \frac{z-i}{z+i}$$

Cabri II による検証

z をつまんで動かしてみてください。 mobius.html