

2.ポアンカレ Disk 内の基本図形，双曲的合図変換

2-1.双曲的直線と双曲的円

Mebius-Cailey 変換 「 $f: \omega = \frac{z-i}{z+i}$ 」は 1 次分数変換なので「対応する角度は変えず（等角性）」，また

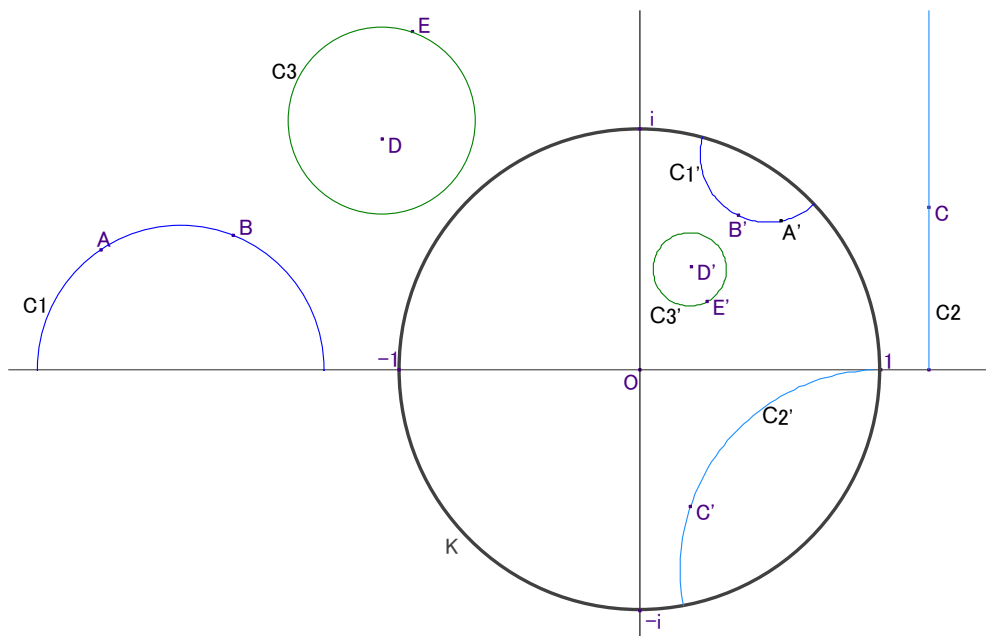
「円→円対応」をします．ポアンカレ上半平面(H^+)では，双曲的直線は「実軸 l と直交している一般化された円 C 」ですから，その像 $f(l)$ と $f(C)$ も直交します．ところが $f(l)$ は単位円 K なので，

上半平面の双曲的直線は，単位円と直交する一般化された円に移ります．また，上半平面の双曲的円は，単位円内の円に移ります．（注：「一般化された円」とは「ユークリッド的な 円または直線」です．）

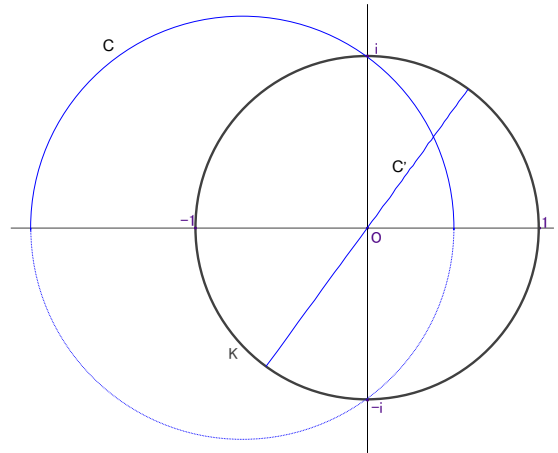
これらが ポアンカレ円盤に於ける **双曲的直線** と **双曲的円** になります．

下図で， C_1, C_2 はポアンカレ上半平面上の双曲的直線で， C_3 はポアンカレ上半平面上の双曲的円です．それらを **Mebius-Cailey 変換** で単位円内(ポアンカレ円盤)に移した図形が，それぞれ C_1', C_2', C_3' です．

「 z が虚軸無限大に近づくとき， $\omega \rightarrow 1$ 」なので，実軸に直交する双曲的直線 C_2 は，「点 1」を通る双曲的直線 C_2' へ移ります．



【注】 「 $f(i)=0, f(-i)=\infty$ 」なので、 H^+ 上の「 i 」を通る双曲的直線は、単位円の直径に移ります。



2-1-1. Cabri II による検証

Drag A,B,C,D,E

[line&circles.html](#)

2-2. 極限円と等距離線

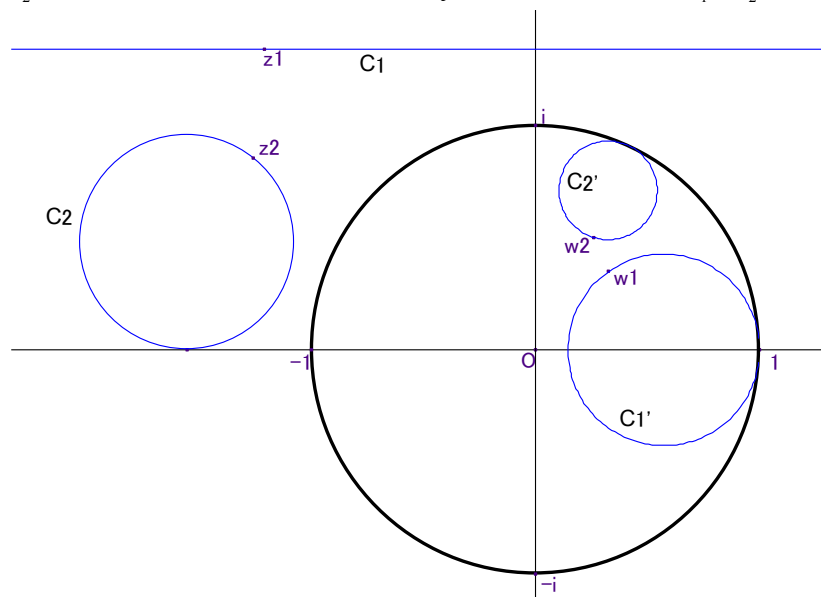
ポアンカレ上半平面(H^+)上の **極限円** や **等距離線** を、 **Mobius-Cailey 変換** 「 $f: \omega = \frac{z-i}{z+i}$ 」で 単位円盤に移した図形が、それぞれ ポアンカレ円盤内の **極限円** や **等距離線** となります。

2-2-1. 極限円

ポアンカレ上半平面(H^+)上の **極限円** は、「実軸に接する円」または「実軸に平行な直線」でした。「 $f(\infty)=1$ 」だから「実軸に平行な直線」は、「点1で単位円に内接する円」に移り、「実軸に接する円」は、「点1以外で単位円に内接する円」に移ります。すなわち、ポアンカレ円盤内の**極限円**は、

単位円に内接する円

です。(下図の C_1, C_2 は H^+ 内の極限円で、それらを f で移した図形が C_1', C_2' です.)



2-2-1-1. Cabri II による検証

Drag A_1, A_2, z_1, z_2

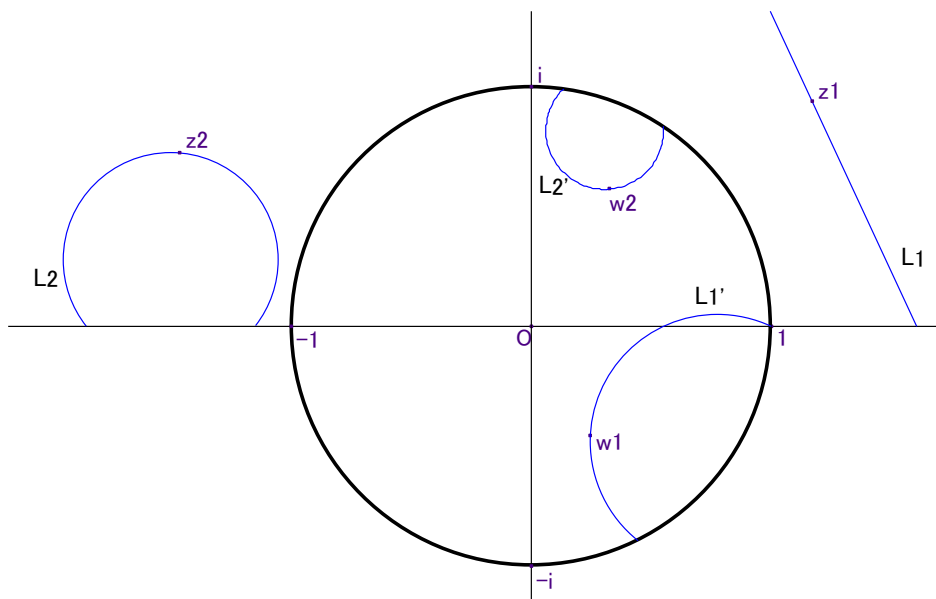
horicircle.html

2-2-2. 等距離線

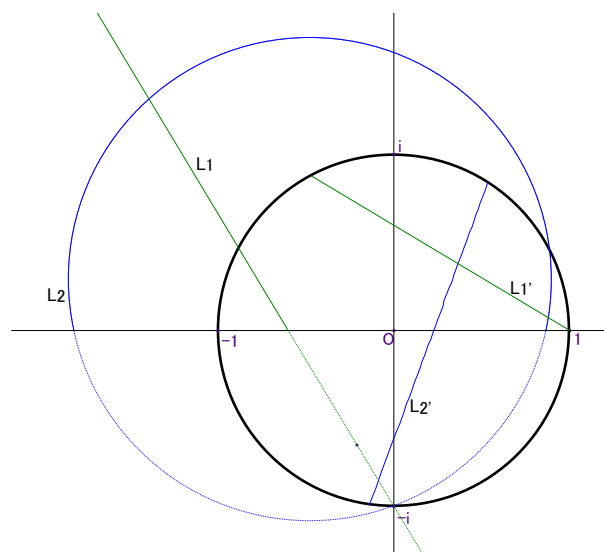
H^+ 上の **等距離線** は、「実軸と斜交する半直線」または「実軸と斜交する円」でした。「 $f(\infty)=1$ 」だから「実軸と斜交する半直線」は、「点1を通り単位円と斜交する円」に移り、「実軸と斜交する円」は、「点1を通らない単位円に斜交する円」に移ります。すなわち、ポアンカレ円盤内の**等距離線**は、

単位円と2点で交わるが 直交しない一般化された円

です。(下図の L_1, L_2 は H^+ 内の等距離線で、それらを f で移した図形が L_1', L_2' です。)



【注】「 $f(-i)=\infty$ 」なので、 L_1, L_2 を延長した直線が点 $(-i)$ を通る時、 L_1', L_2' は単位円の (直径ではない) 弦となります。

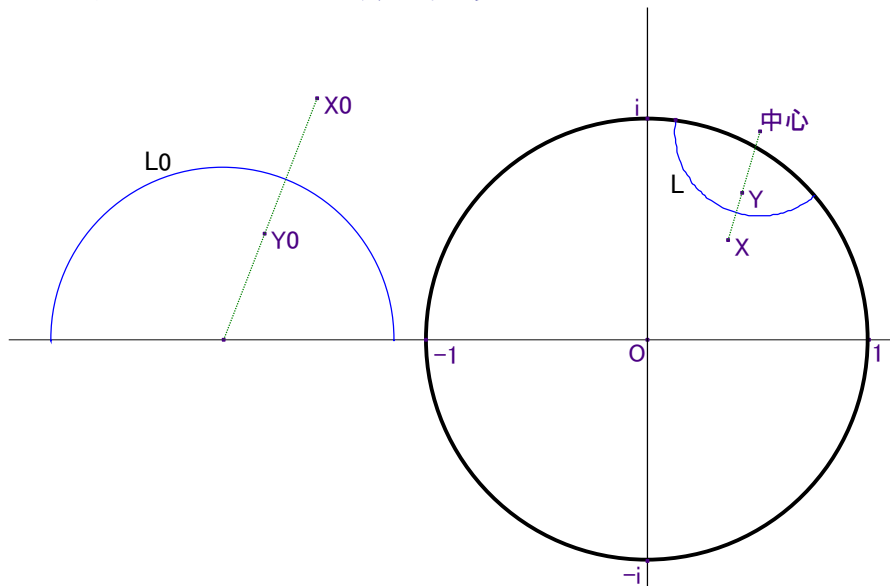


2-2-2-1. Cabri II による検証

Drag $A_1, A_2, B_1, B_2, z_1, z_2$

equi_distant_line.html

2-3. ポアンカレ円盤内の双曲的合同変換



ポアンカレ円盤内の2点を X と Y , 双曲的直線を L , **Möbius-Cailey 変換** を f とすると,

「 X と Y がポアンカレ円盤内で L に関し対称 (鏡像)」 \Leftrightarrow 「 $f^{-1}(X)$ と $f^{-1}(Y)$ が $f^{-1}(L)$ に関し鏡像」

とします. (上図では $X_0 = f^{-1}(X)$ と表示しています.) ところが,

「 g を1次分数変換とすると, 点 P と Q が円 C に関し鏡像ならば, $g(P)$ と $g(Q)$ も, $g(C)$ に関し鏡像となる.」(「鏡像原理」)

が成り立つので, X と Y は「通常の意味でも」 L に関し鏡像になっています. 即ち **L に関する (通常の) 「複素数平面上の鏡像変換」** によって X は Y に移ります. わざわざ H^+ に f^{-1} で戻してから鏡像を取る必要はありません.

また, H^+ では「全ての H^+ の双曲的合同変換は, H^+ の双曲的直線に関する鏡像の合成で表せます.」
それと同様に, ポアンカレ円盤(Disk)では, **Disk** 上の全ての双曲的合同変換は, **Disk** 上の双曲的直線に関する鏡像の合成で表せます.

2-3-1. Cabri II による検証

Drag A,B,P [mirror.html](#)

2-4. ポアンカレ円盤内の「幾何」

Möbius-Cailey 変換 $f: \omega = \frac{z-i}{z+i}$ は「一対一かつ連続な変換」なので、ポアンカレ上半平面での点、双曲的直線と双曲的円などの結合関係（交わるとか、同一直線上にあるとか双曲的合同であるなどの関係）は、そのままポアンカレ円盤でも成り立ちます。すなわち、

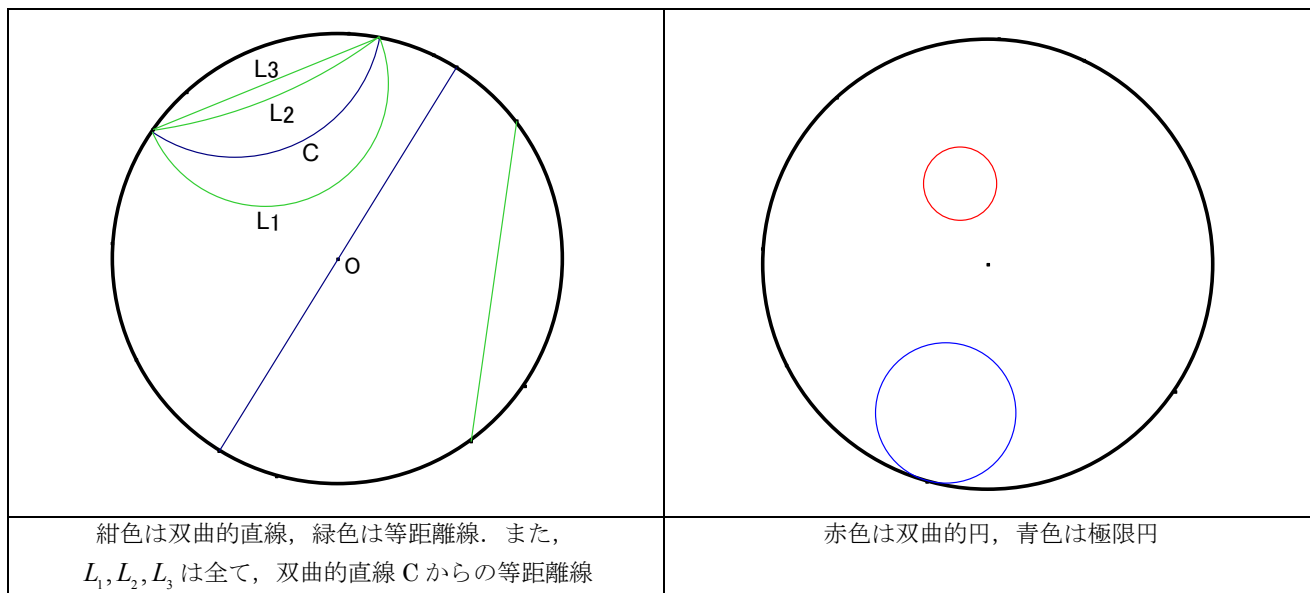
ポアンカレ上半平面で成り立つ幾何の定理は、ポアンカレ **Disk** 上でも成り立ち、また逆に、ポアンカレ **Disk** 上で成り立つ幾何の定理は上半平面上でも成り立ちます。

このように

一対一かつ連続な変換によって移されたモデルは、元のモデルと幾何的には同一視できます。

よって双曲的幾何のモデルは無数に作ることが出来ます。

| | ポアンカレ上半平面 | ポアンカレ Disk |
|---------|-------------------------|-------------------|
| 双曲的直線 | 実軸と直交する一般化された円 | 単位円と直交する一般化された円 |
| 双曲的円 | 実軸と共有点を持たない円 | 単位円の内部の円 |
| 等距離線 | 実軸と 2 点で交わる円, 実軸と斜交する直線 | 単位円と斜交する一般化された円 |
| 極限円 | 実軸と接する円, 実軸と平行な直線 | 単位円と接する円 |
| 無限遠直線 | 実軸 | 単位円 |
| 双曲的合同変換 | 双曲的直線に関する鏡像の合成 | 双曲的直線に関する鏡像の合成 |

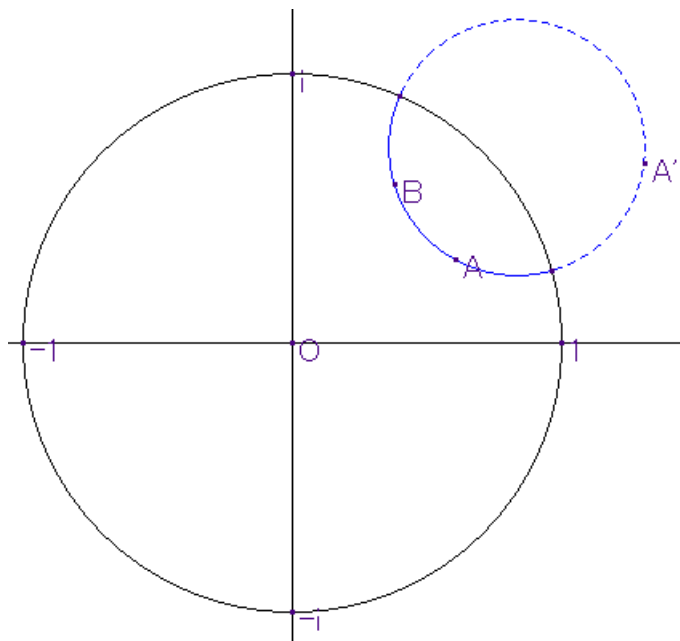


2-5. 双曲的直線と双曲的円の CabriII による作図

【注】双曲的直線，双曲的円などは全て ポアンカレ円盤内の基本図形とします。

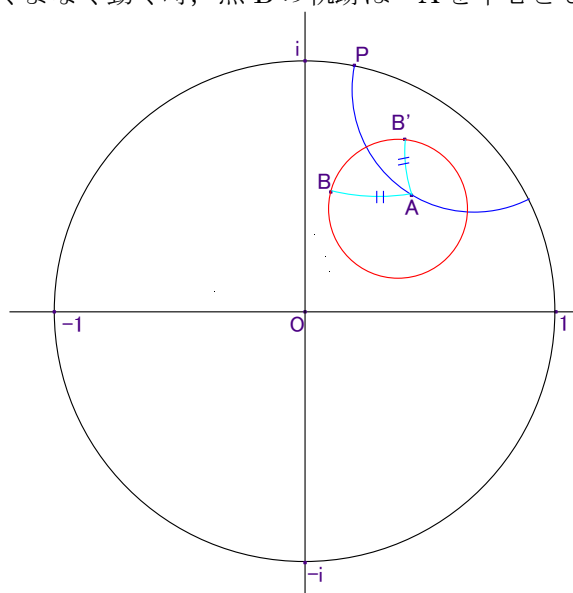
2-5-1. 双曲的直線の作図

下図で単位円に関する点 A の鏡像を A' とし，3 点 A, A', B を通る円 C を描くと，鏡像変換の性質より，円 C は単位円と直交します．よって C は双曲的直線です．



2-5-2. 双曲的円の作図

単位円上に動点 P をとり，双曲的直線 AP を L とします． L に関する点 B の鏡像を B' とすると，鏡像変換は双曲的合同変換なので， $[A, B] = [A, B']$ (ただし，点 A と点 B の双曲的距離を $[A, B]$ と書きます.) よって，点 P が単位円上をくまなく動く時，点 B' の軌跡は「 A を中心とし B を通る双曲的円」です．



2-5-2-1. CabriII による検証

Drag A,B,P draw_circle.html