4.ポアンカレ円盤上の双曲的角度，双曲的距離

Mebius-Cayley 変換を $f:\omega=\dfrac{z-i}{z+i}$ とします．「ポアンカレ円盤における 2 点 P,Q の双曲的距離」は，「f^{-1} によって，P と Q を 上半平面 H+に戻した時の距離」です．また「ポアンカレ円盤における 2 曲線 L,M のなす双曲的角度」は，「f^{-1} によって，L と M を 上半平面 H+に戻した時の角度」です．

4-1．双曲的角度

Mebius-Cayley 変換は一次分数変換で，1 次分数変換によって角度は変わりません．そして H+内の双曲的角度はユークリッド的角度と等しいので，

ポアンカレ円盤上での双曲的角度は ユークリッド的角度と等しい．

4-2．双曲的距離

4-2-1．双曲的微小距離

$f:\omega=\dfrac{z-i}{z+i}$ のとき，

$$f'(z)=\frac{1\cdot(z+i)-(z-i)\cdot 1}{(z+i)^2}=\frac{2i}{(z+i)^2}$$

微分の定義より「$d\omega=f'(z)dz$」だから，

$$|d\omega|=|f'(z)||dz|=\frac{2|dz|}{|z+i|^2}$$

また，

$$\begin{aligned}1-|\omega|^2 &= \frac{|z+i|^2-|z-i|^2}{|z+i|^2}=\frac{(z+i)\overline{(z+i)}-(z-i)\overline{(z-i)}}{|z+i|^2}=\frac{(z+i)(\bar{z}-i)-(z-i)(\bar{z}+i)}{|z+i|^2}\\ &= \frac{-2i(z-\bar{z})}{|z+i|^2}=\frac{-2i\{(x+iy)-(x-iy)\}}{|z+i|^2}=\frac{4iy}{|z+i|^2}=\frac{4\,\mathrm{Im}(z)}{|z+i|^2}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{2|d\omega|}{1-|\omega|^2}=\frac{|dz|}{\mathrm{Im}(z)}\quad \text{(但し } \mathrm{Im}(z) \text{ は } z \text{ の虚数成分)}$$

ところが，ポアンカレ平面における双曲的線素の長さは $ds=\dfrac{|dz|}{\mathrm{Im}(z)}$ だから，ポアンカレ円盤上の線素の双曲的長さを ds とすると，

$$\boxed{ds=\frac{2|d\omega|}{1-|\omega|^2}\cdots(\#)}$$

「ds」は原点からの距離だけの関数で，角度によらず，また単位円周に近づくと「∞」に発散します．

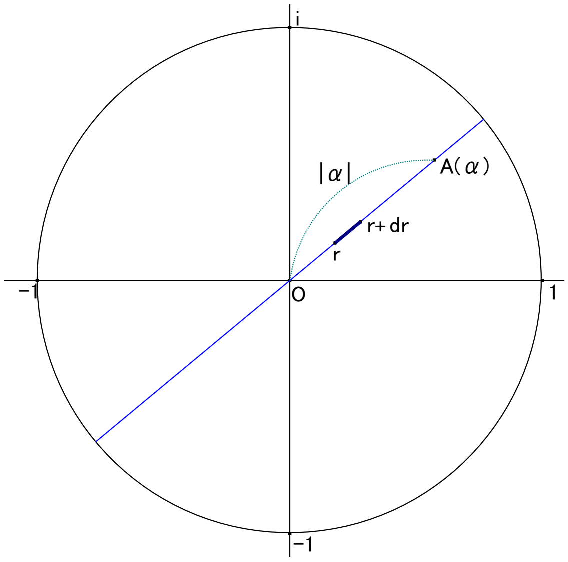
【注】原点を通る双曲的直線（ユークリッド的線分）に関する鏡像により，原点からの距離が等しい 2 点は互いに移ります．これからも「ds」は角度に依らないことが分かります．

4-2-2. 原点と点 A との双曲的距離

(#)より，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ と原点との双曲的距離 $[0, \mathrm{A}(\alpha)]$ は,

$$\begin{aligned}[\,0,\ \mathrm{A}(\alpha)\,] &= \int_0^{|\alpha|} \frac{2dr}{1-r^2} \\ &= \int_0^{|\alpha|} \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1-r} \right) dr \\ &= \log\left(\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|} \right) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

$\because$ OA 方向に r 軸を取ると，$ds = \dfrac{2dr}{1-r^2}$



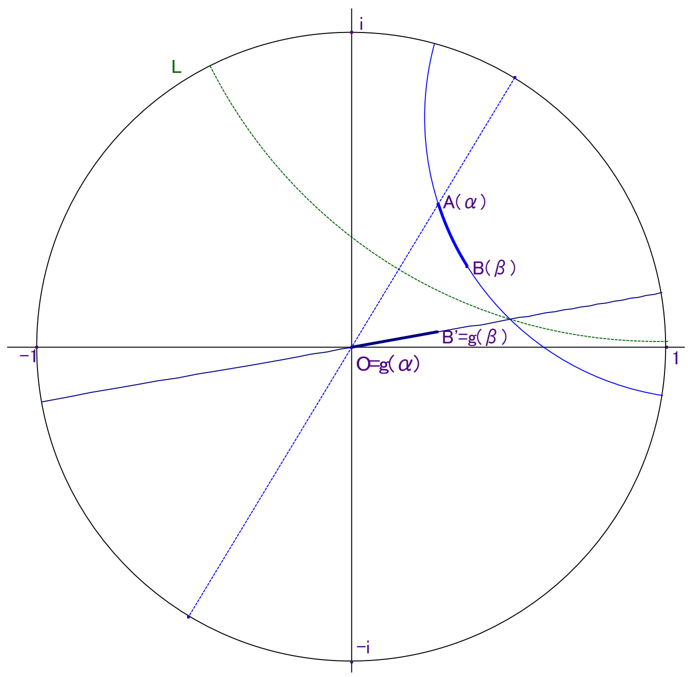
4-2-3. 二点 A,B 間の双曲的距離

一般の場合は,「原点 O と点 A の双曲的垂直 2 等分線 L に関する鏡像」，または「A を O に移す一次分数変換」で A を原点に移します．第 3 節より，「A を O に移す一次分数変換」の一つは,

$$\mathrm{g}(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$$

$\mathrm{A}(\alpha)$ と $\mathrm{B}(\beta)$ の双曲的距離 $[\alpha, \beta]$ は，原点と $g(\beta)$ の双曲的距離 $[0, g(\beta)]$ に等しいので,

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta] &= [0, g(\beta)] \\ &= \left[0, \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right] \\ &= \log\left(\frac{1 + \left| \dfrac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|}{1 - \left| \dfrac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|} \right) \quad \cdots(**) \end{aligned}$$



なお，この式は $\mathrm{A}(\alpha)$ が原点の時も正しいです.

4-2-4. Cabri II による検証

点 A,B を動かして，２点間の距離を読み取ってみてください． distance.html