

3. 双曲的直線

2点 A, B を両端とする曲線 C の内, C に沿って測った A, B 間の双曲的距離が最小の曲線 (測地線) を, 双曲的線分 AB と定義します.

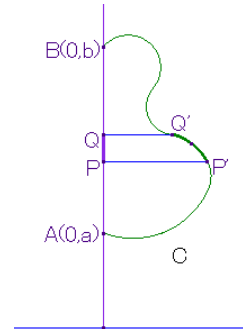
3.1. 点 A, B が実軸に垂直な直線上にあるとき

A, B を通る任意の曲線を C とします. 線分 AB 上に, 非常に近い2点 P, Q をとり, P, Q を通り実軸と平行な直線と C の交点を 各々 P', Q' とすると, 「 C に沿った P, Q 間の距離」は, 「直線 PQ に沿った距離」より大きいから,

$$\overline{PQ} \leq (P', Q')_C$$

上の式で, 距離はユークリッド的ですが. P, Q の y 成分はほぼ等しいので, それらを y とおくと双曲的にも, 同じ大小関係が成り立ちます.

$$[P, Q] = \frac{\overline{PQ}}{y} \leq \frac{(P', Q')_C}{y} = [P', Q']_C$$



即ち「 C に沿った P, Q 間の双曲的距離」は, 「直線 PQ に沿った P, Q 間の双曲的距離」より大きい.

ゆえに, 2点 A, B を結ぶ双曲的線分は, ユークリッド的線分 AB です. ...(*)

また, $A(0, a)$ と $B(0, b)$ を結ぶ線分の双曲的長さは $[A, B] = \int_a^b \frac{dy}{y} = \log \left| \frac{b}{a} \right|$ となります. (1-2)

3.2 点 A, B が実軸に垂直な同一直線上にないとき

中心が実軸上にあり A, B を通る円を K, K と実軸の交点の 1 つを M とし, M を中心とし A を通る円を描きます. この円に関する鏡像 f によって, K は点 A を通り実軸に垂直な直線 K' に移ります. さらに f による B の像を B' とすると, f は双曲的移動だから「K に沿った A と B の双曲的距離」と「 K' に沿った A と B' の双曲的距離」は等しいです. 即ち,

$$[A, B]_K = [A, B']_{K'}$$

A, B を通る任意の曲線 C の f による像を C' とすると, 同様に,

$$[A, B]_C = [A, B']_{C'}$$

故に, 曲線 C が円 K 上の弧でないなら, 3.1(*) より,

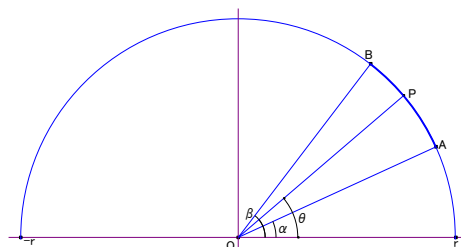
$$[A, B]_K = [A, B']_{K'} < [A, B']_{C'} = [A, B]_C$$

よって, 2 点 A, B を結ぶ双曲的線分は 円 K 上の弧 AB と一致します.

また $A(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$, $B(r \cos \beta, r \sin \beta)$ を結ぶ双曲的線分の長さは,

$$[A, B] = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|dz|}{y} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r d\theta}{r \sin \theta} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \log \left| \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} \right|$$

となります. (1.2)



[注] 直線と比べて, 上に凸の曲線の方が双曲的距離が短くなるのは, y 成分の大きい方が $ds = \frac{|dz|}{y}$

が小さくなることから明らかです. 蜃気楼などの「光の屈折の原理」と同様です.

Cabri II による検証 (2 点 A, B を結ぶ双曲的線分)

2 点 A, B を通る円 C の中心は実軸上にあります. 円 C に沿って測った双曲的距離 $l = [A, B]_{\text{円弧}}$ と,

折れ線 $AP + PQ + QB$ に沿った双曲的距離: $l' = [A, P]_{\text{線分AP}} + [P, Q]_{\text{線分PQ}} + [Q, B]_{\text{線分QB}}$ を比べます.

P, Q を Drag して l' ができるだけ小さくなるようにして下さい.

[geodetic line.html](http://www.geogebra.org/m/geodetic_line.html)

3-3 双曲的直線

「実軸は無限遠の集まり」(1.2) なので、双曲的線分は両側にいくらでも長く延長できます。これを **双曲的直線** といいます。以上から 双曲的直線は、

実軸と直交する直線、または 実軸上に中心を持つ半円

となる事が分かりました。