

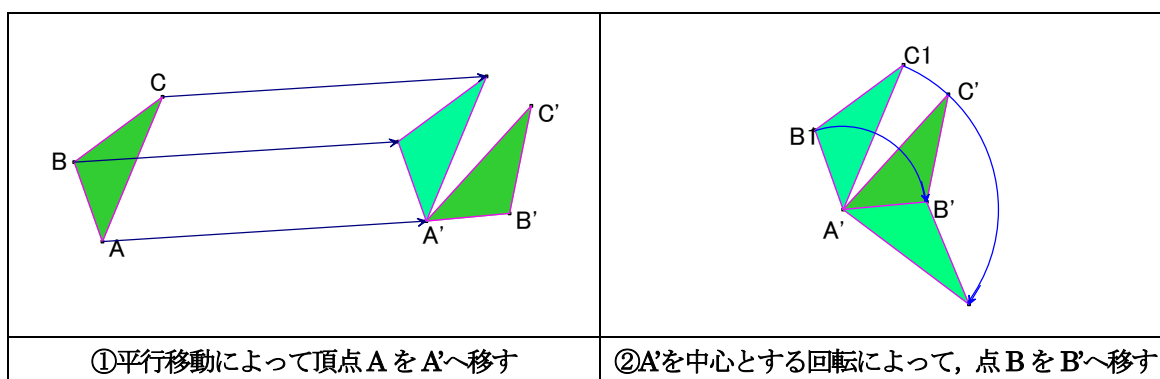
## 5. 双曲的合同変換の分子と原子

### 5.1. ユークリッド的合同変換の「分子」

よく知られているように、ユークリッド平面では 全ての合同変換は 平行移動, 回転移動, 対称移動の合成で表すことができます. すなわち「二つの合同な図形があったとき, 平行移動, 回転移動, 対称移動の合成で, 一方の図形を他方の図形に移すことができます」。この意味で, 平行移動, 回転移動, 対称移動 は「合同変換を作り上げる分子」のようなものと言えます。

例えば, 合同な $\triangle ABC$  と $\triangle A'B'C'$  があったとき, 次のようにして $\triangle ABC$  を $\triangle A'B'C'$ へ移すことができます。

- ①平行移動によって頂点  $A$  を  $A'$ へ移す.
- ② $A'$  を中心とする回転によって, 点  $B$  を  $B'$ へ移す.
- ③図形の向きが違っている場合は, 直線  $A'B'$ に関する対称移動で  $C$  を  $C'$ へ移す.



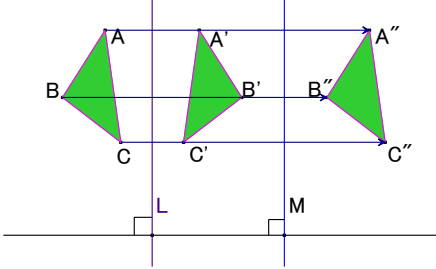
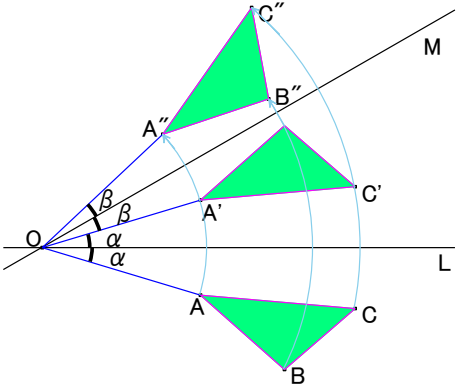
## 5.2. ユークリッド的合同変換の「原子」

平行移動, 回転移動, 対称移動のうち, 「平行移動」と「回転移動」は, 二つの「対称移動」の合成で表せます.

即ち,  $f, g$  をそれぞれ 直線  $L$ , 直線  $M$  に関する対称移動 とすると,  $f$  と  $g$  の合成  $g \circ f$  は,

$L // M$  のときは, 平行移動,  $L \nparallel M$  のときは, 回転移動

となります. すなわち  $L // M$  のときは,  $g \circ f$  は,  $L$  と  $M$  に垂直な方向への平行移動となります.  $L$  と  $M$  が点  $O$  で交わっているときは,  $g \circ f$  は点  $O$  を中心とする回転移動となります. (下図)

	
<p><math>\overline{AA''} = 2 \cdot (L \text{ と } M \text{ の距離})</math> で一定, <math>AA'' \perp L</math>  <math>A</math> は任意の点なので, <math>g \circ f</math> は平行移動</p>	<p><math>\overline{OA''} = \overline{OA}</math>, <math>\angle AOA'' = 2(\alpha + \beta)</math> (一定)  <math>A</math> は任意の点なので, <math>g \circ f</math> は回転移動</p>

このように「平行移動」と「回転移動」は, 二つの「対称移動」の合成で表せるので, 結局, **全ての合同変換は, 対称移動だけで表せます.** この意味で「**対称移動は, 合同変換の原子**」と言えます.

Cabri II による検証 (回転移動を鏡像変換で合成)

Drag L, M, A, B, C [rotation on E.html](#)

### 5.3. 双曲的合同変換の原子

ユークリッド平面と同様に，双曲的直線に関する鏡像変換の合成によって，「二つの双曲的合同な図形があったとき，一方の図形を他方の図形に移すことができます」。この意味で，双曲的直線に関する鏡像変換は「双曲的合同変換を作り上げる原子」のようなものと言えます。

[双曲的合同変換の原子は次の2つです]

<p>実軸に垂直な直線に関する鏡像 (対称移動)</p>	<p>実軸上の点Aを中心とする円に関する鏡像</p>

$f, g$  をそれぞれ双曲的直線  $L, M$  に関する鏡像変換 とします。

(ア) 「 $L, M$  が実軸に垂直な直線」の場合は， $g \circ f$  は「実軸に平行な方向への平行移動 (2.1)」です。

(イ) 「 $L, M$  が実軸上の点  $A$  を中心とする同心円」の場合は， $g \circ f$  は「点  $A$  を相似の中心とする，相似比が正の相似変換 (2.3)」となります。・・・(\*)

<p>実軸に平行な方向への平行移動</p>	<p>実軸上の点Aを相似の中心とし，相似比が正の相似変換</p>

**[注]** (\*)の証明.

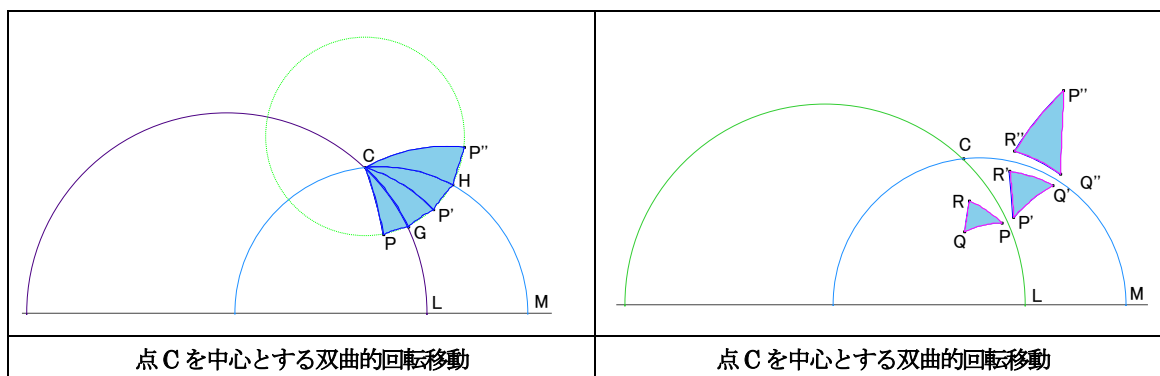
A が原点にくるように平行移動しても一般性を失わない。このとき，A を中心とする半径  $R_1, R_2$  の円に

関する鏡像変換をそれぞれ  $f, g$  とすると，  $f: z \mapsto \frac{R_1^2}{\bar{z}}$ ，  $g: z \mapsto \frac{R_2^2}{\bar{z}}$

故に， $f$  と  $g$  の合成は，  $g \circ f: z \mapsto \frac{R_2^2}{\left(\frac{R_1^2}{\bar{z}}\right)} = \frac{R_2^2}{R_1^2} z = kz$  ( $k$ は正の定数) (Q.E.D.)

(ウ) 「L, MがH+内の点Cで交わる場合」は,  $g \circ f$ は「点Cを中心とする双曲的回転移動」となります. 左下図で「 $P \xrightarrow{f} P' \xrightarrow{g} P''$ 」とします. さらに弧CP, CP', CP'', PG, P'G, P'H, P''Hは全て双曲的線分とします. このとき,  $\triangle CPG \equiv \triangle CP'G$ ,  $\triangle CP'G \equiv \triangle CP''G$  (双曲的合同)だから,

$$[C,P]=[C,P']=[C,P''], \quad \angle PCP'=2 \times (\angle GCP' + \angle P'CH) = 2\angle GCH \text{ (一定)}$$



**【注】** 上の説明で「角」は「双曲的角度」を表しています. 双曲的角度は双曲的合同変換で変わらないので, 「 $\angle PCG = \angle P'CG$ 」などの相対的關係は成り立ちます.

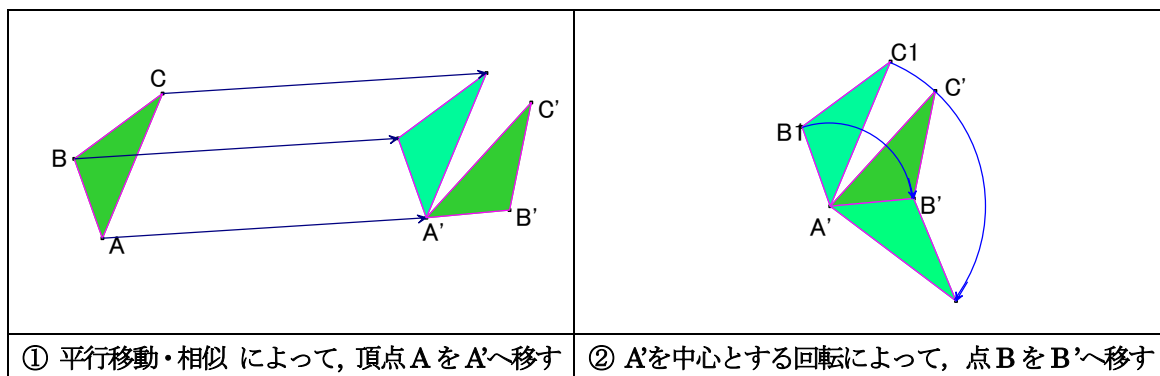
以上より,  $f, g$ をそれぞれ双曲的直線L, Mに関する鏡像変換とすると,  $g \circ f$ は,

- (ア) L, Mが実軸に垂直な直線の場合は, 実軸に対する平行移動,
- (イ) L, Mが実軸に中心Aを持つ同心円のときは, Aを中心とする相似変換,
- (ウ) L, MがH+内の点Cで交わる円のときは, Cを中心とする双曲的回転移動

を表します.

(ア),(イ),(ウ)の変換と鏡像変換を利用して, 双曲的に合同な $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は, 互いに移せます. 即ち,

- ① (ア) または (イ) の変換によって頂点AをA'へ移す.
- ② A'を中心とする双曲的回転(ウ)によって, 点BをB'へ移す.
- ③ 図形の向きが違っている場合は, 双曲的直線A'B'に関する鏡像でCをC'へ移す.



(ア),(イ)の変換も「鏡像変換の合成」で作れるので、

鏡像変換の繰り返しにより、2つの双曲的合同的な図形を、互いに他方の図形に移すことができます。

この意味で、

双曲的直線に関する鏡像変換は「双曲的合同的変換を作り上げる原子」

と言えます。

### Cabri IIによる検証（双曲的回転移動）

Drag C,D,E,P. [rotation\\_on\\_H+\(no1\).html](#), Drag C,D,E,P,Q,R. [rotation\\_on\\_H+\(no2\).html](#)

#### 5.4. 双曲的合同変換の分子

「(ア)実軸と平行な移動, (イ)実軸上の点 A を中心とする相似変換, (ウ)双曲的回転移動」 ([5.3]) の 3 つは, 双曲的合同変換の分子 といえますが, これ以外にも「双曲的直線に関する鏡像変換」の合成で表される変換はあります. しかも, 偶数回の合成は, 全て一次分数変換 (2-6) となります.

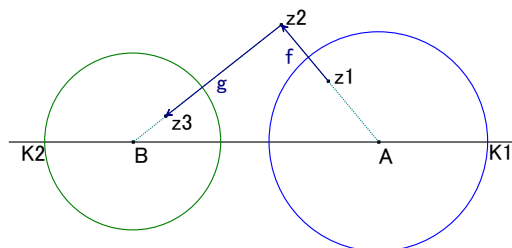
点 A(a), 点 B(b) を実軸上の点,

A が中心で半径  $R_1$  の円  $K_1$  に関する鏡像変換を  $f$ ,

B が中心で, 半径  $R_2$  の円  $K_2$  に関する鏡像変換を  $g$

とすると,

$$f: z \mapsto \frac{R_1^2}{\bar{z} - a} + a, \quad g: z \mapsto \frac{R_2^2}{\bar{z} - b} + b$$



よって  $f$  と  $g$  の合成は,

$$g \circ f: z \mapsto \frac{R_2^2}{\frac{R_1^2}{z - a} + a - b} + b = \frac{\{R_2^2 + b(a - b)\}z - aR_2^2 + bR_1^2 - ab(a - b)}{(a - b)z - a(a - b) + R_1^2}$$

「 $A = R_2^2 + b(a - b)$ ,  $B = -aR_2^2 + bR_1^2 - ab(a - b)$ ,  $C = (a - b)$ ,  $D = R_1^2 - a(a - b)$ 」

とおくと,

$$\begin{aligned} AD - BC &= \{R_2^2 + b(a - b)\} \cdot \{R_1^2 - a(a - b)\} - \{-aR_2^2 + bR_1^2 - ab(a - b)\} \cdot (a - b) \\ &= (R_1R_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

故に,

$$g \circ f(z) = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad (A, B, C, D \text{ は実数で, } AD - BC > 0) \dots (*)$$

即ち,  $g \circ f$  は一次分数変換(2-6)です.  $f$  や  $g$  が「実軸に垂直な直線」の時も同様にして示せます.

ゆえに, 鏡像変換の偶数回の合成は, 全て一次分数変換 (2-6) となります. (次頁 **[注]**)

「一次分数変換の合成は やはり一次分数変換」なので, 鏡像変換を偶数回合成すると, 全て一次分数変換 (2-6) となります.

すなわち,

「図形の向きを変えない」(ひっくり返さない) 双曲的合同変換は, 全て1次分数変換

また,

「図形の向きを変える」合同変換の場合でも, 鏡像変換の合成で表せる

この意味で,

1次分数変換は, 双曲的移動の分子, 鏡像変換は, 双曲的移動の原子

です.

**【注】** 実際, 一次分数変換(2-6);

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \text{ は実数, } ad - bc > 0) \cdots (*)$$

において,

$$a = 1, c = 0, d = 1 \text{ とすれば, } \omega = z + b$$

$$a \neq 1, c = 0, d = 1 \text{ とすれば, } \omega = az + b \iff \omega - \alpha = a(z - \alpha), \text{ 但し } \alpha = a\alpha + b$$

これらはそれぞれ, 「実軸に平行な平行移動(ア)」と「 $\alpha$ を相似の中心とする相似変換(イ)」を表しています. 「双曲的回転移動(ウ)」も,  $c \neq 0$ の一次分数変換(2.6)となるはず. (【注】終わり)

## 5.5. 一次分数変換の合成に必要な回数

「双曲的直線に関する鏡像」の偶数回の合成は、下の **1次分数変換(\*)** になります。(5.4)

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \text{ は実数, } ad-bc > 0) \quad \dots(*)$$

逆に、双曲的合同変換は「二つの双曲的直線 L,M に関する鏡像の合成」で作られる(5-3)ので、(\*)のタイプの **1次分数変換** も「直線 L,M に関する鏡像の合成」(**2回の鏡像の合成**)で作られます。

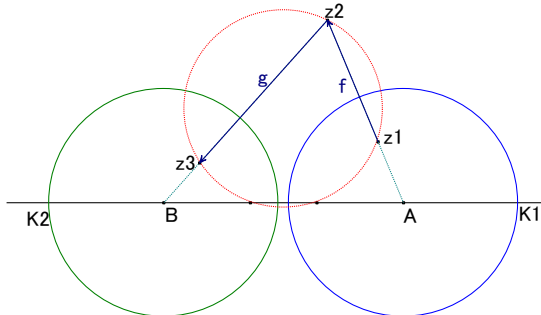
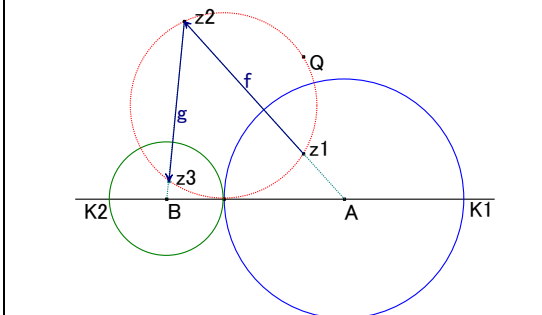
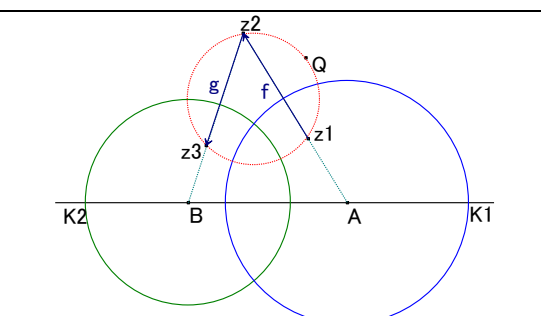
**【注】** (\*)の形の 任意の一次分数変換は、「**実軸に平行な移動**」と「**相似比が正の相似変換**」と「 $\omega = -\frac{1}{z}$  の変換」

の合成で作られるので、(\*)の形の一次分数変換は、**偶数回の鏡像変換の合成**で作れることは明らかです。しかし、「**2回**で充分！」というのがポイントです。これは、一般の1次分数変換では成り立ちません。

さらに、 $f, g$  をそれぞれ双曲的直線 L, M に関する鏡像変換 とすると、 $g \circ f$  は、

- (ア) L,M が交点を持たないならば、平行移動や、相似変換 を一般化した双曲的移動、
- (イ) L,M が双曲的平行ならば、ユークリッド平面では存在しないタイプの双曲的移動、
- (ウ) L,M が  $H^+$  内の点 C で交わる時は、C を中心とする双曲的回転移動

と3種類に分類され、それぞれ「**双曲型**」、「**放物型**」、「**楕円型**」と呼ばれます。(後述)

 <p>「双曲型」の一次分数変換 (ア)</p>	 <p>「放物型」の一次分数変換 (イ)</p>
 <p>「楕円型」の一次分数変換 (ウ)</p>	<p><b>Cabri による検証</b></p> <p>Drag <math>z_1, Q, A, B, K_1, K_2</math></p> <p>双曲型: <a href="http://hyperbolic.move.html">hyperbolic.move.html</a></p> <p>放物型: <a href="http://parabolic.move.html">parabolic.move.html</a></p> <p>楕円型: <a href="http://elliptical.move.html">elliptical.move.html</a></p>