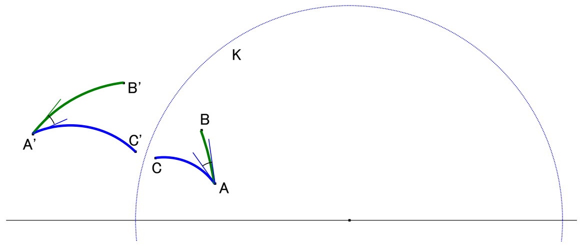
6. 双曲的角

6.1 双曲的角の定義

「二つの双曲的角が等しい」とは「一方が他方に双曲的移動で重ねられる事」と定義します.

例えば、弧 AB, AC は双曲的線分で，円 K による鏡像で 弧 A'B' , A'C' に移ったとします. この時定義より $\angle ABC = \angle A'B'C'$ となります.（∠ABC , ∠A'B'C' は双曲的角）



しかし，**鏡像変換によりユークリッド角度は保存されます.** 上図では「弧 AB, AC の接線のなすユークリッド角」と,「弧 A'B' , A'C' の接線のなすユークリッド角」は等しくなります. さらに「双曲的移動は鏡像変換の合成で作られる」(5.3）ので,「**双曲的角度が等しいなら，ユークリッド的角度も常に等しくなります**」. 逆に，H^+ において，ユークリッド的に重ねられる角は，双曲的にも重なることができます. よって,

双曲的角度とユークリッド的角度は等しい

です. 即ち，H^+ 上で，双曲的直線 L, M が点 A で交わっている時,

L と M のなす双曲的角度は，交点 A に於ける L と M の接線のなすユークリッド角度

です.

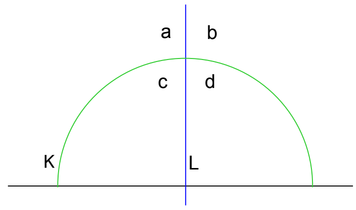
Cabri II による検証 (双曲的角度とユークリッド角度)

Drag A,P,Q,（プログラムの都合上, 補角が表されることもあります.） [definition_of_angle.html]

6.2 双曲的角度の例
6.2.1 双曲的直角

右下図のように, H^+を双曲的直線 KとL（LはKの中心を通り実軸に垂直な直線）で分割してできる双曲的角度を$\angle a, \angle b, \angle c, \angle d$ とします．Lに関する鏡像で$\angle a$ は$\angle c$ へ，$\angle b$ は$\angle d$ へ移り，円Kに関する鏡像で $\angle a$ は$\angle c$ へ，$\angle b$ は$\angle d$ へ移ります． よって，

$$\angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle R \quad \text{（双曲的に等しい）}$$



ここで，$\angle R$ は双曲的直角で，一直線のなす双曲的角を2等分した角です．明らかに，ユークリッド的にも，

$$\angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle R \quad \text{（ユークリッド的に等しい）}$$

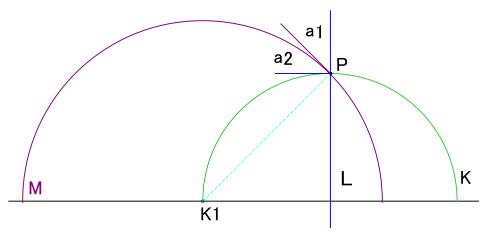
ここで，$\angle R$ はユークリッド的直角です.

この様に「双曲的直角」と「ユークリッド直角」は等しくなります.

6.2.2. 双曲的直角の２等分

さらに，上図の様にＬとＫの交点をＰ，Ｋと実軸の交点の１つをK_1，K_1 を中心としＰを通る円をＭとすると，Ｍに関する鏡像によりＫはＬに, ＬはＫに移り，Ｍは動きません．よってＭとＬのなす角を$\angle a_1$, ＭとＬのなす角を$\angle a_2$ とすると，Ｍに関する鏡像で互いに移るので，

$$\angle a_1 = \angle a_2 = \frac{1}{2}\angle R \quad \text{（}\angle R\text{ は双曲的直角）}$$

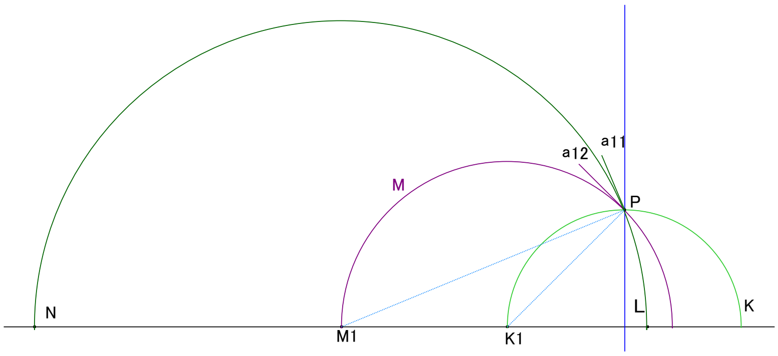


K_1 とＰを結ぶ補助線を引くと，明らかに，

$$\angle a_1 = \angle a_2 = \frac{1}{2}\angle R \quad \text{（}\angle R\text{ はユークリッド直角）}$$

したがって，「双曲的$\frac{1}{2}$直角」と「ユークリッド的$\frac{1}{2}$直角」は等しいです.

6.2.3. 双曲的直角の n 等分



さらに， K と実軸の交点の 1 つを M_1 , M_1 を中心とし P を通る円を N，N と M のなす角を $\angle a_{11}$,

N と L のなす角を $\angle a_{12}$ とすると，N に関する鏡像で互いに移るので，

$$\angle a_{11} = \angle a_{12} = \frac{1}{4}\angle R \quad (\angle R \text{ は双曲的直角})$$

ところが，△K_1PM_1 に注目すると，

$$\angle a_1 = \angle a_2 = \frac{1}{4}\angle R \quad (\angle R \text{ はユークリッド的直角})$$

したがって，「双曲的 $\frac{1}{4}$ 直角」と「ユークリッド的 $\frac{1}{4}$ 直角」は等しいです.

同様の操作を繰り返して ∠R を次々に 2 等分していくことができ，常に「双曲的 $\frac{1}{2^n}\angle R$ 」と「ユークリッド的 $\frac{1}{2^n}\angle R$ 」は等しくなります. $\frac{1}{2^n}\angle R$ 以外の角に関しても，これらの角の無限個の和で合成することができるので， 「双曲的角度」と「ユークリッド的角度」は常に等しくなります.

Cabri II による検証（直角の 4 分割）

Drag A, C. p と L のなす角を円 C で 2 等分し，$\frac{1}{4}\angle R$ （双曲的角）を作ってください. 2 等分したら，X を動かして，C に関する鏡像 X' の動きを見てください. [quarter_of_R.html]

【付録】二円のなす双曲的角度の簡単な測り方

双曲的直線 K と L のなす角，即ち交点における接線k, l のなす角度をθ とします．K, L が実軸に垂直な直線でない時，　円の中心を C, D とすると，「AC⊥k ,AD⊥l」 だから,

$$\theta = \angle\mathrm{CAD} \text{ または } \theta = \pi - \angle\mathrm{CAD}.$$