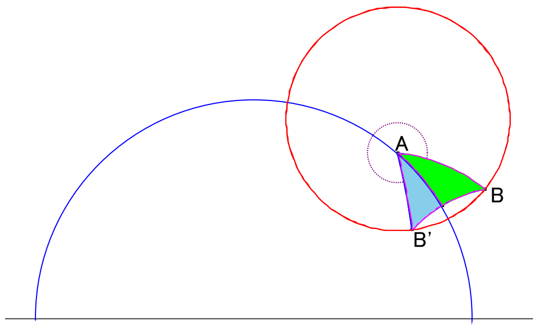
7.　双曲的円

7-1. 双曲的円の定義

双曲的円を「定点からの双曲的距離が一定な点の軌跡」と定めます.

7-2.　双曲的円の作図（中心と一点）



「点 A が中心で点 B を通る双曲的円」を作図します.　A を中心とする円 C 上に動点 P を取り，A と P を通る双曲的直線 K に関する B の鏡像を B'とします. 鏡像変換は双曲的合同変換だから, [A,B']=[A,B]. よって P が円 C 上を動く時に B'が描く軌跡は, A を中心とし B を通る双曲的円 E です.

【注】図の青い半円が K, 赤い円が E です. K が, A を通る双曲的直線を全て表しながら変化する時, B' の軌跡が双曲的円 E となります. よって, C は円である必要はなく, A の周りを「グルット廻る」図形であれば何でも OK です. また **双曲的円の作図は 図形の向きが変わっても問題ない** ので, 一つの双曲的直線 K に関する鏡像を考えるだけで 作図できます.

Cabri II による検証（双曲的円の作図）

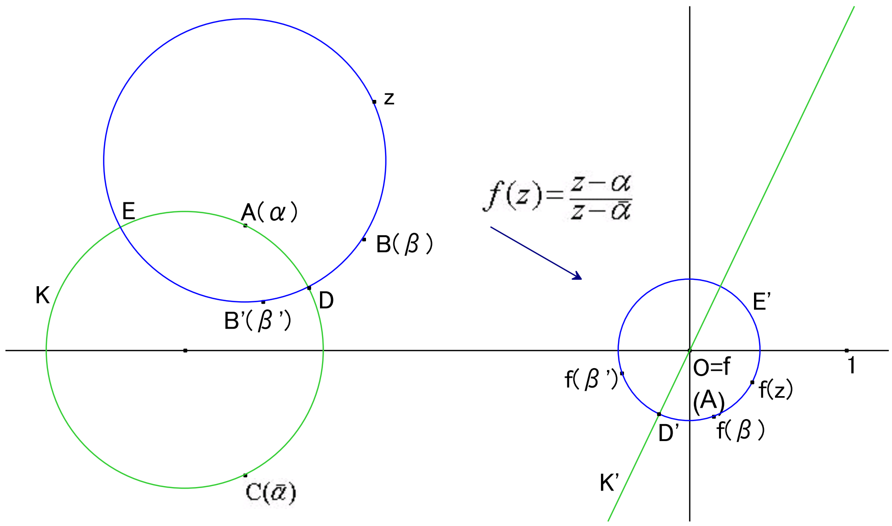
Drag　P, A, B　　draw_circle.html

7.3. 双曲的円の性質

7.3.1. 双曲的円は，ユークリッド的にも円となる

7.3.2. 双曲的円の半径は，円周と双曲的に直交する

7.3.1. 双曲的円の中心を A，　A の実軸に関する対称移動を C とすると，双曲的円は，A,C からの距離の比が等しい「アポロニウスの円」となる



【証明】複素係数の一次分数変換を使って証明します．$\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\bar{\alpha})$ は定点です．　A を中心とし点 B を通る双曲円を E，　実軸を中心とし点 A を通る円を K，　K に関する B の鏡像を $\mathrm{B}'(\beta')$ とすると，$[\mathrm{A},\mathrm{B}]=[\mathrm{A},\mathrm{B}']$ だから，K が変化した時の B' の軌跡が E となります．(7.2)

この図形を一次分数変換 $f : z \mapsto \dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$ で移すと，「$\mathrm{A} \xrightarrow{f} \mathrm{O}$，$\mathrm{C} \xrightarrow{f} \infty$」なので，K は原点 O を中心とする直線 K' に移り，鏡像原理より(または∠BAD=∠B'AD から)，$f(\mathrm{B})$ と $f(\mathrm{B}')$ は直線 K' に関して鏡像になります．

K を動かすと K' は原点を中心に回転するので，$f(\mathrm{B}')$ は，原点を中心とし固定点 $f(\mathrm{B})$ を通る円 E' になります．この円を f^{-1} で戻すと「一次分数変換の像は，ユークリッド的円または直線」なので，E はユークリッド的にも円になります．(7.3.1 証明終)

E'と K' は直交するので，原像 E と K も直交します．(7.3.2 証明終)

さらに E 上の点を $\mathrm{P}(z)$，円 E' の半径を r とすると，「$|f(z)|=r$」より，

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right| = r \Longleftrightarrow |z-\alpha| = r\,|z-\bar{\alpha}| \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{AP}} = r\cdot\overline{\mathrm{CP}}$$

故に，E は「A と C からの距離の比が $r:1$」の「アポロニウスの円」となります．(7.3.3 証明終)

【注】複素数係数の一次分数変換:

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ (a,b,c,d\ \text{は複素数},\ ad-bc\neq 0)$$

は次の様に変形できます.

$$f(z)=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2\left(z+\dfrac{d}{c}\right)}$$

ここで, $k=\dfrac{-ad+bc}{c^2}$ とおくと k は0でない複素数で,

$$z\mapsto z+\frac{d}{c}\ (\text{平行移動})\ ,z\mapsto\frac{1}{z}\ (\text{鏡像変換}),\ z\mapsto kz\ (\text{回転と拡大}),\ z\mapsto z+\frac{a}{c}\ (\text{平行移動})$$

の合成が f となります. ゆえに, f によって

円は, 円または直線に移ります. また角度も保存します.

なお, 一次分数変換を使って簡単な変換に直す事を「標準化」と言います. ここでは「定点 A と C を通る円 K に関する鏡像」が「原点を通る直線に対する対称移動」に「標準化」されました. 後でもう少し詳しく見ます.

Cabri II による検証（定理の証明）

- 標準化の利用です. Drag A, B, M, K, z, w, O, 1 proof.html
- 半径と円周が双曲的に直交することの確認です. Drag P circle_perp_radius.html
- アポロニウスの円になることの確認です. Drag P, A, B aporonius_circle.html