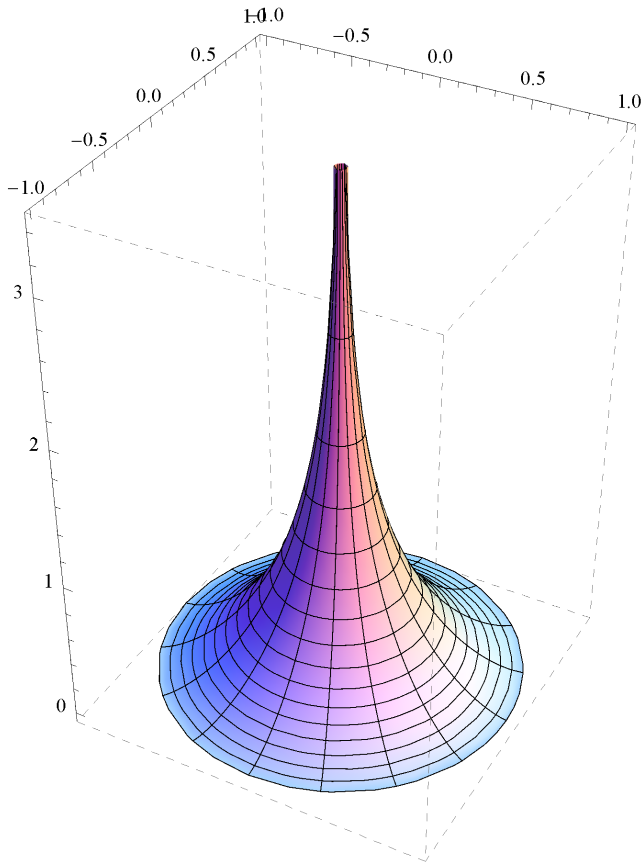
# 1. 偽球とは？

## 1-1. 概説

「偽球 (pseudo sphere)」は，双曲平面を 3 次元のユークリッド空間の中で作った曲面です.

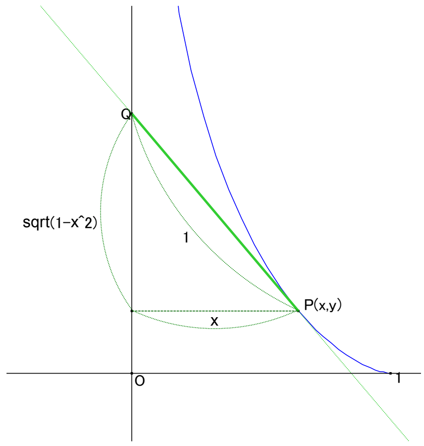
偽球上では 双曲的距離や双曲的角度が　ユークリッド的に測った距離や角度と一致します．但し双曲平面の有限な領域しか表せません.

下図は ポアンカレ上半平面 $H^+$ の $0 \le x < 2\pi, 1 \le y$ の領域を 1 対 1 対応で移した偽球です. 底円の半径は 1 で，偽球は $z$ 軸上方に 無限に伸びています．しかし， $z < 0$ には伸ばせません. また，底円の半径は 1 である必要はありませんが，　すべての偽球は相似なので　本質的には偽球は 1 つだけです.



## 1-2．牽引線（tractrix）

長さ$k$の線分PQの片端Qを$z$軸上に置いて　他の端Pを引っ張った時にできる曲線を　牽引線(tractrix)と言います.（右図の青色の曲線）　この曲線を$z$軸の周りに回転した回転体の曲面が　偽球です．上図の偽球は $k=1$としたものです.
$k=1$のとき，$P(x,z)$とすると，右図より PQ の傾きは $\left(-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$となるので, Pは次の微分方程式をみたします.




$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdots①$$

$x=\sin\theta$と置換して　この微分方程式を解くと

$$z=\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{1-x^2}\cdots②$$

です．これを$y$軸の周りに回転した回転体の曲面が偽球です．なお，一般には ①,②はそれぞれ

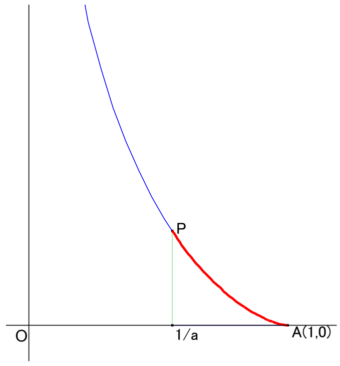
$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{x},\qquad z=k\log\frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x}-\sqrt{k^2-x^2}$$

となります．詳しい証明は 「ユークリッド幾何から現代幾何へ」小林昭七著　をご覧ください.

### 1-2-1. Cabri II と Mathematica による検証

$k=1$の 牽引線（tractrix）です．Pを Drag して下さい.　　　tractrix.html
偽球です. Mathematica player(無料）が必要です.　サイズの変更は画面の右下の目盛りを利用，または CG の図をクリックして現れる「枠」を drag してください.　　　gikyuu.nbp

## 1-3. 偽球とポアンカレ上半平面 $H^+$の関係




$k=1$の tractrix では ①より「$\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$」なので

$$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=1+\left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2=1+\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{1}{x^2}\quad\cdots③$$

よって曲線上に点A(1,0)，Pをとり，Pの$x$座標を$x=\dfrac{1}{a}$とすると，

$$(\text{AP}の弧長)=\int_{\frac{1}{a}}^{1}\sqrt{1+(z')^2}\,dx=\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{1}{x}\,dx=\log a$$

故に この曲線を$z$軸の周りに回転させると，（下右図）

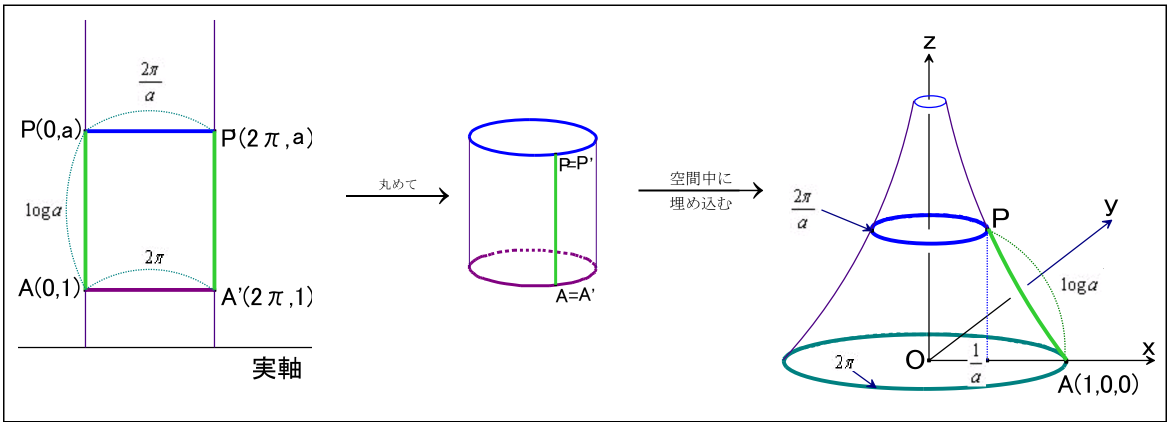
$$弧長\,\text{AP}=\log a\,,\quad 底円の周囲が2\pi\,,\quad 上円の周囲が\frac{2\pi}{a}\quad\cdots(*)$$

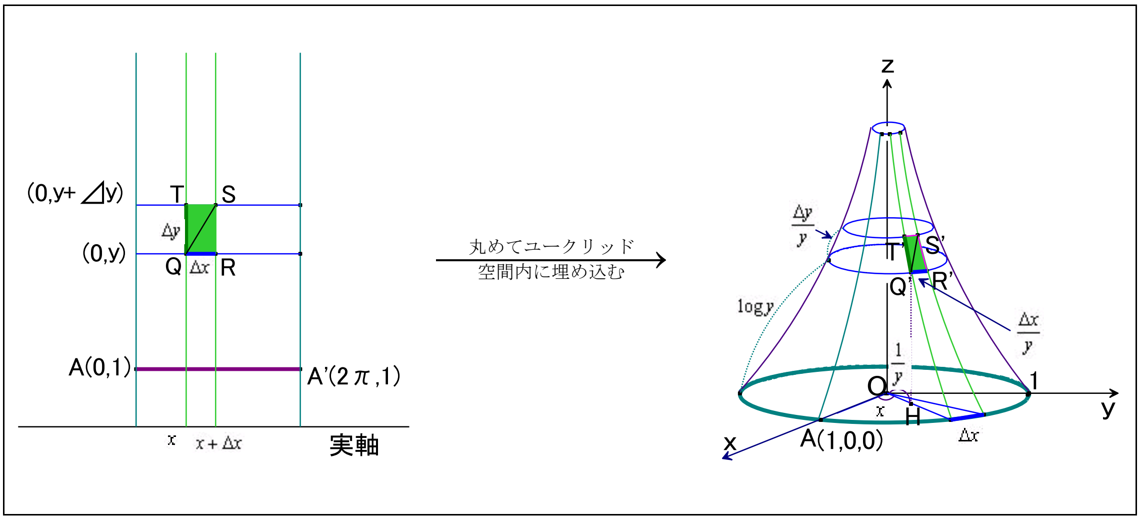
の帯状の領域が出来ます．一方，ポアンカレ上半平面 H＋では「双曲的微小距離: $ds=\dfrac{|dz|}{y}$」なので，A$(i)$，P$(a\,i)$，A'$(2\pi+i)$，P'$(2\pi+a\,i)$の4点（但し$a>1$）を取ると その双曲的距離は，

$$[\text{A, P}]=\int_1^a\frac{dy}{y}=\log a\,,\qquad [\text{A, A'}]_{C_1}=2\pi\,,\qquad [\text{P, P'}]_{C_2}=\frac{2\pi}{a}\quad\cdots(**)$$

です．但し，A と A'，P と P' の双曲的距離は，太線の線分(極限円)に沿って測るものとします．

(*)と(**)から，$H^+$の長方形AA'P'P が 偽球上の帯領域に「あるがままの長さで」移っていることが分かります．$a$はどんなに大きくとも良いので， $H^+$の領域「 $0\le x\le 2\pi, 1\le y$」を 丸めて円柱にし，ユークリッド空間$R^3$の中に埋め込んだ曲面が偽球 と言えます．






$a$ は任意なので，任意の距離に関しても 偽球上ではそのまま普通に図った長さが，双曲的距離を表します．一般に，$H^+$上の任意の点$Q(x+iy)$に，偽球上で 「偏角が$x$ , $z$ 軸からの距離が$\frac{1}{y}$」の点$Q'$ を対応させます．詳しくは，偽球の方程式を $f(r)=\log\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}-\sqrt{1-r^2}$ と置いて，

$$Q(x+iy)\xrightarrow{g}Q'\left(\frac{1}{y}\cos x,\ \frac{1}{y}\sin x,\ f\left(\frac{1}{y}\right)\right)\ \cdots④$$

と言う対応$g$ を考えます． $g$ によって $H^+$上の微小長方形 QRST（上図）は,偽球上の微小長方形 $Q'R'S'T'$ へ移りますが，「$\log(1+x)\fallingdotseq x$」または「$\Delta(\log y)=\frac{1}{y}\Delta y$」を使うと，

$$(\text{Q'T'の弧長})=\log(y+\Delta y)-\log y=\log\left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)\fallingdotseq\frac{\Delta y}{y}$$

（上の式は，前頁の③の関係式から　直接導けます.）また，明らかに，

$$(\text{Q'R'の弧長})=\frac{\Delta x}{y}$$

そして，偽球はユークリッド空間に埋め込まれているので，三平方の定理が使えて，

$$\overline{Q'S'}^2=\overline{Q'R'}^2+\overline{Q'T'}^2=\left(\frac{\Delta x}{y}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2=\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{y^2}$$

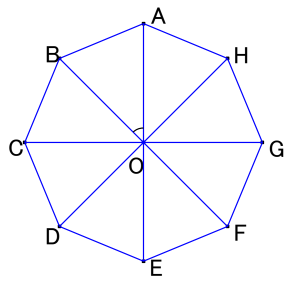
ところが，H+でも　QR,　QT,　QS の双曲的距離はそれぞれ

$$[Q,R]=\frac{\Delta x}{y},\quad [Q,T]=\frac{\Delta y}{y},\quad [Q,S]=\frac{\overline{QS}}{y}=\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{y}$$

です！ ゆえに，　偽球上では，そのまま普通に長さを測ると　それが双曲的長さを表します．

角度に関しても同様のことが言えます．例えば　前頁の図で 「∠TQR=90°(双曲的角度)」ですが，偽球上で　ユークリッド的に測ってもやはり 「∠T'Q'R'=90°」です．

また，右図のような正 8 角形(∠AOB = ∠BOC=…=∠HOA かつ AO=BO=…＝HO の 8 角形)が　$H^+$上にあるとします．これを 対応 $g$ によって 偽球上に移しても「∠A'O'B' = ∠B'O'C'=…=∠H'O'A'」となります．よって $H^+$上で双曲的に測っても，偽球上でユークリッド的に測っても ∠AOB(∠A'O'B')は 45° です．同様にして（連続性も使えば）任意の角度について **角度の保存** が言えます．

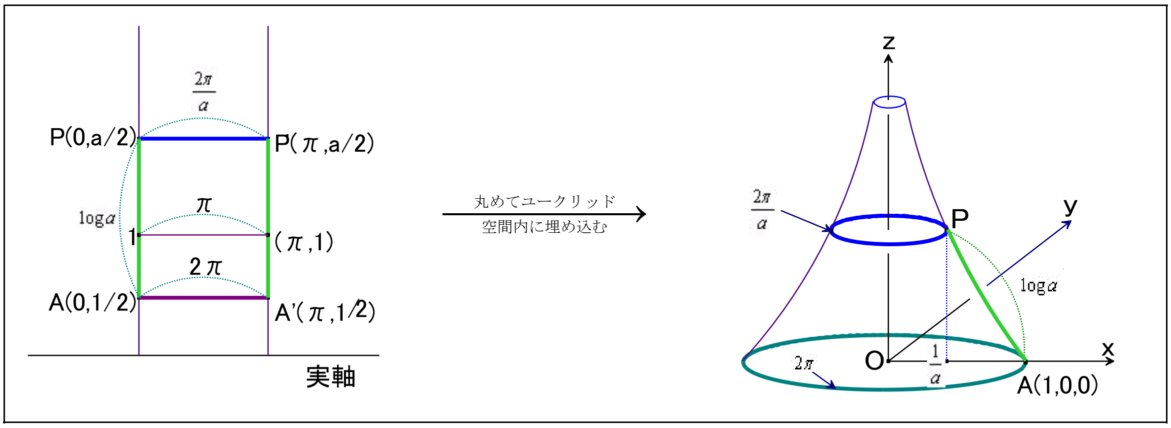



すなわち， $H^+$に於ける双曲的距離や双曲的角度が　「そのままの大きさで」偽球上に移されます．$H^+$に於ける双曲的距離や双曲的角度を知りたければ，偽球上に移して「分度器」と「定規」で測ることができます．（実際には　長さを測るには 紐も必要かな と思いますが…）

## 1-4. 様々な対応

偽球と上半平面 $H^+$ の対応は一通りではありません．「$0 \le x < 2\pi, 1 \le y$」の代わりに，「$0 \le x < \dfrac{2\pi}{n}, \dfrac{1}{n} \le y$」の領域と対応させることが出来ます．例えば「$0 \le x < \pi, \dfrac{1}{2} \le y$」の領域は，次の対応で偽球上に移ります．（下図）

$$\mathrm{Q}\left(x + \frac{yi}{2}\right) \xrightarrow{h} \mathrm{Q'}\left(\frac{1}{y}\cos x,\ \frac{1}{y}\sin x,\ f\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$




極限円 AA'を実軸に近づけるためには，それに反比例して 横幅を小さくする必要があります．実は「双曲平面全体をユークリッド空間内に埋め込むことは出来ない事」が証明されています．

## 1-5. 一般の偽球

偽球の底円の半径を増やすと H+ の広い領域と対応しそうに思えますが, **実はそうではありません.**

一般の偽球（長さ $k$ の線分 PQ を引っ張った牽引線から作った 半径 $k$ の偽球）の方程式は,

$$z = k\log\frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x} - \sqrt{k^2-x^2} \cdots ⑤$$

一方，今まで見てきた $k=1$ の偽球の方程式は,

$$z = \log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} - \sqrt{1-x^2} \cdots ②$$

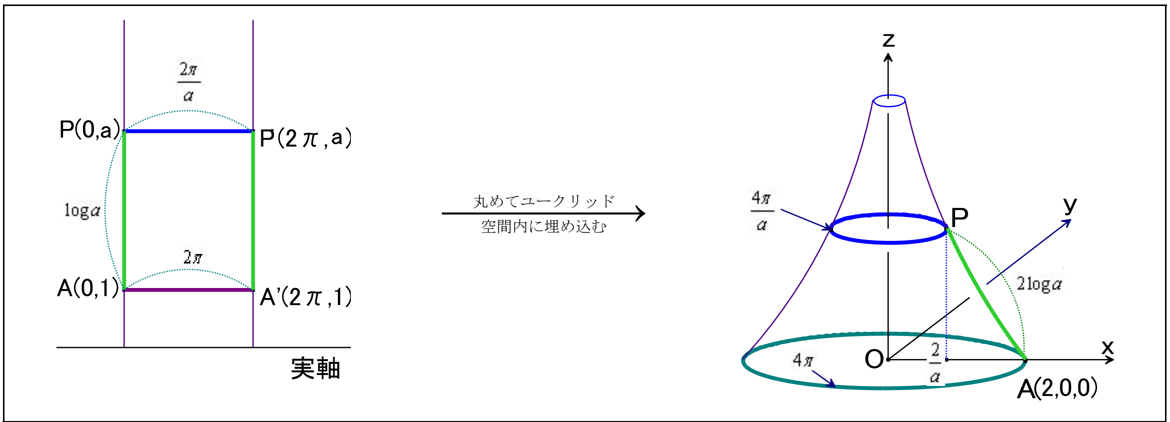
しかし，②の式で $z \to \frac{z}{k}, x \to \frac{x}{k}$ と置くと,

$$\frac{z}{k} = \log\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2}}{\frac{x}{k}} - \sqrt{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2} . \qquad \therefore z = k\log\frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x} - \sqrt{k^2-x^2}$$

となり⑤の式と一致します．すなわち $k=1$ の偽球を**単位偽球**と呼ぶことにすると，全ての偽球は単位偽球と相似です．よって例えば $k=2$ の偽球では，そのままのユークリッド的長さでなく それを $\frac{1}{2}$ 倍にした長さが 双曲的長さを表します．言い換えると，一般の偽球で長さを測るときは

「底円の半径を 1 単位 として長さを測る」

とそれが双曲的長さと一致します．なお，角度はそのまま 双曲的角度と一致します.




【注】取り扱いが簡単なので，以下の節では，**単位偽球**のみを扱います.