２．「ポアンカレ上半平面の像」としての偽球

2-1．双曲的直線

左下図はポアンカレ上半平面 H^+ の領域「$0 \le x < 2\pi, 1 \le y$」で，右下図はそれを写像 g（第１節④）で偽球上に移したものです．全て Mathematica 6 で作成しました．Interactive に操作することも出来ます．なお見づらいですが 図 1,2 で底円上の点 $(x, y, z) = (1,0,0)$ から上に伸びる茶点線の**境界線**があります．これは H^+ の 「$x = 0, 2\pi$」に対応します．

図１は H^+ での直線 AB が　完全に「$0 \le x < 2\pi, 1 \le y$」に入っています．この時は，偽球上で，直線 A'B' は　底円まで到達しています．直線 AB と $y = 1$ の交点は 「$x ≒ \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$」なので，右図でも　底円と偏角が「$\theta ≒ \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$」の点で交わっています．なお 最も手前の経線が $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ です．

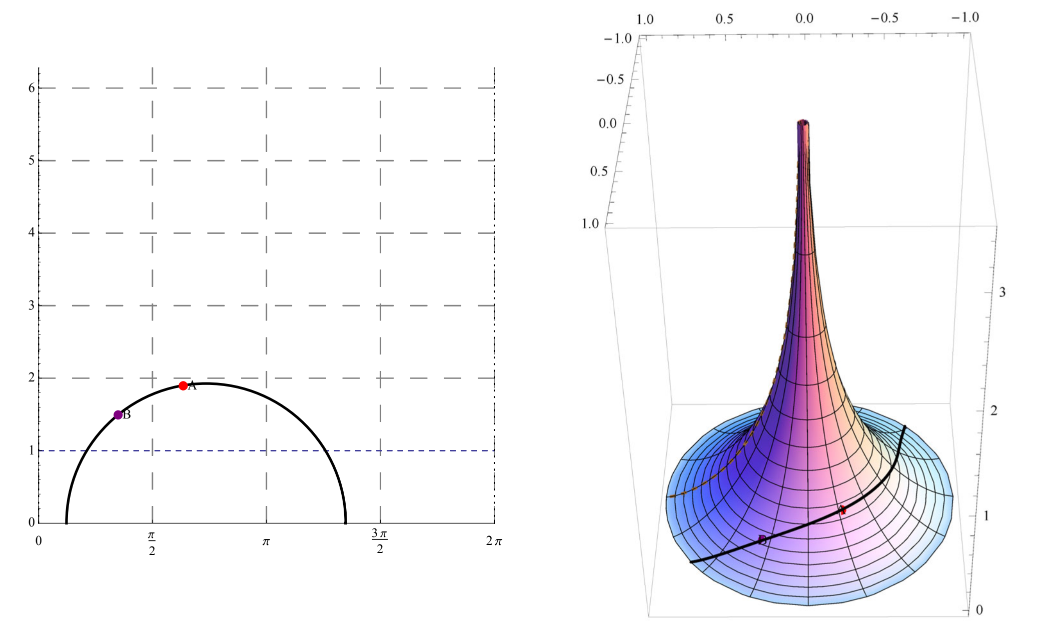


図１

図2ではH^+ での直線ABが 「$0 \le x < 2\pi, 1 \le y$」に入っていません．よって，直線A'B'は 底円まで到達できずに**境界線**で切られています．ちなみに A,Bの座標は $A\left(\frac{\pi}{2},4\right)$ $B\left(\frac{\pi}{4},\frac{7}{2}\right)$ です．

偽球上で A',B'の偏角はそれぞれ $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}$ です．

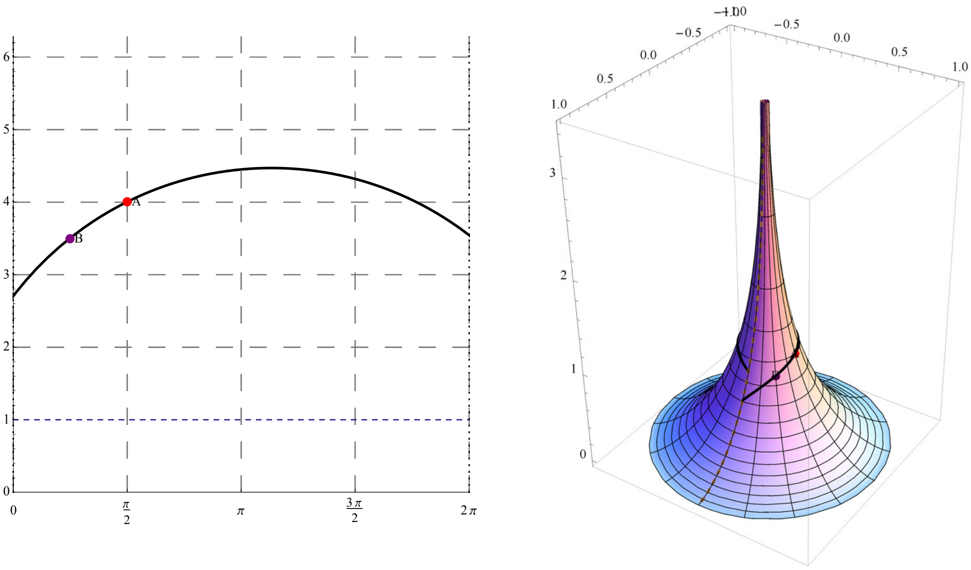


図2

実軸と垂直な直線は 偽球上では上に伸びる**経線**となります．図3の直線ABは $x=\frac{\pi}{2}$ です．

偽球上では $\theta=\frac{\pi}{2}$ の経線に移ります．底円上の点 $(x,y,z)=(0,1,0)$ から上に伸びています．

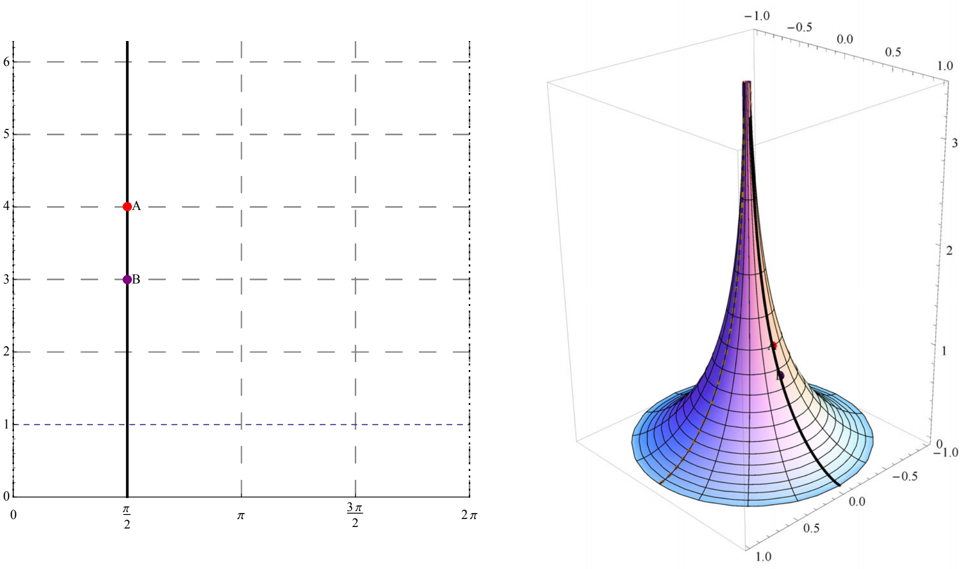


図3

2-1-1. Mathematica による検証

Mathematica6/7 または mathematica player (無料)が必要です．マウスで点 A,B を色々動かして直線の変化を見ることが出来ます．なお円，極限円，等距離線も見ることが出来ます．サイズの変更は右下のメニューから，または図をダブルクリックした後 drag して下さい．

[line&circles.nbp]

2-2.　双曲的円

図 4 は，中心が $C\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, 半径が 0.5 の双曲的円です．左図で「 $x=\frac{\pi}{2}$ 」との交点では，「$y≒1.2, y≒3.3$」ですが，確かに「$\log\frac{2}{1.2}≒0.5,\ \log\frac{3.3}{2}≒0.5$」です．　偽球上で,中心に長さが 0.5 の糸の一端を結びつけ，他の端をぐるっと回すと 右図の円になります．

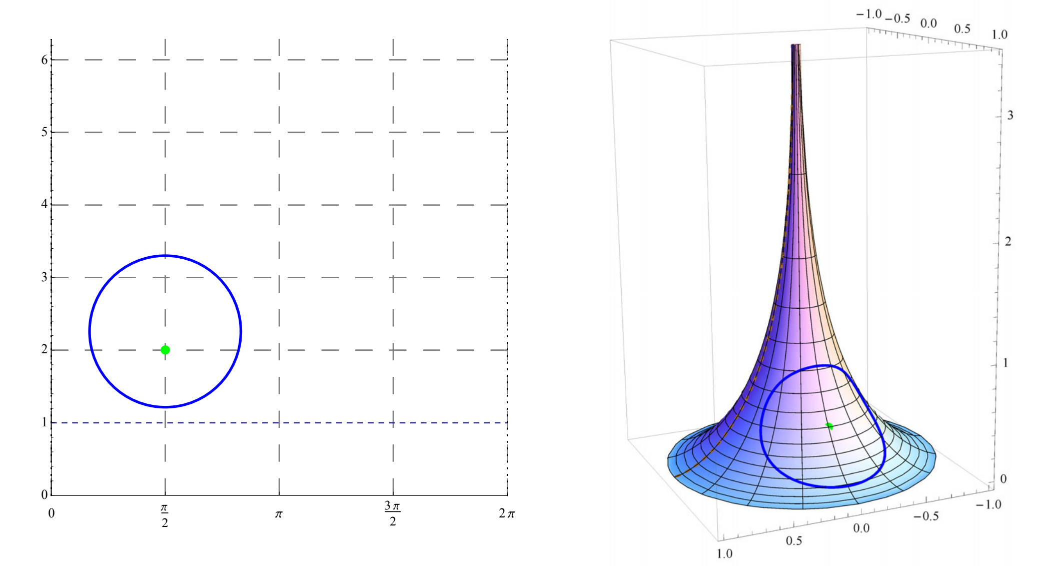


図 4

図 5 は，中心が $C\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$,半径が $\dfrac{\pi}{4}$ の双曲的円です．偽球上で中心が $(x, y, z) = (0,1,0)$,

底円との交点が　ほぼ $\theta = \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{4} \Longleftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ の円になります.

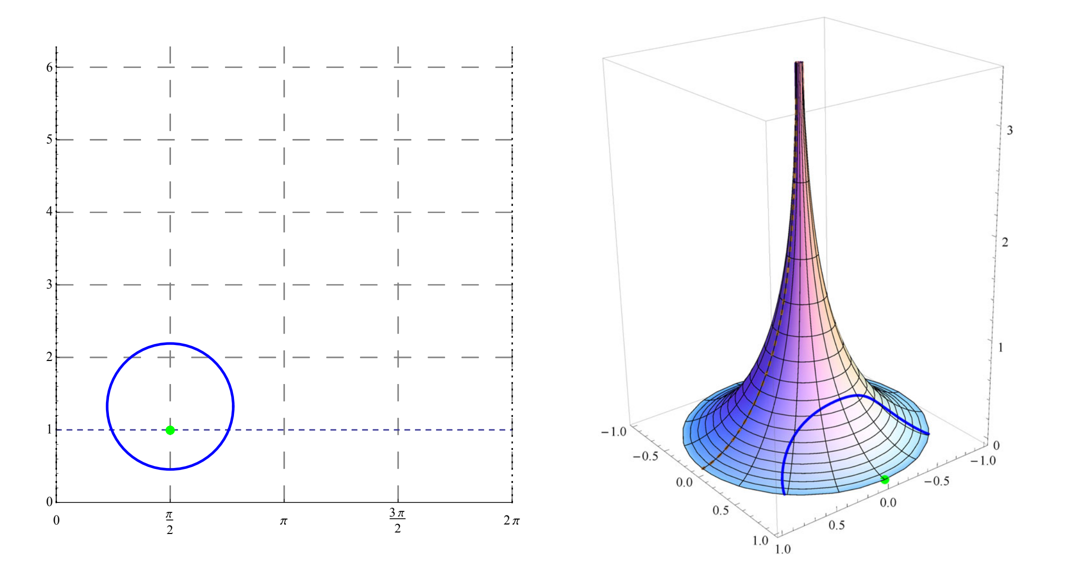


図 5

図 6 は，中心が $C(\pi, 0.5)$,半径が 2 の双曲的円です．偽球上では 中心が $(x, y, z) = (-1,0,0)$,

底円との交点が　ほぼ $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ の円になります.

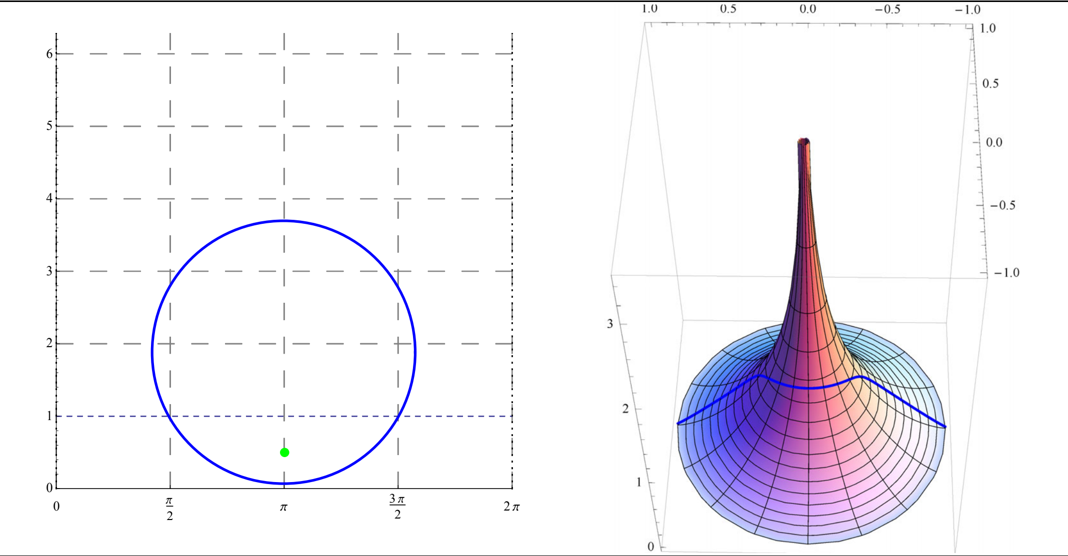


図 6

2-2-1. Mathematica による検証

Mathematica6/7 または mathematica player (無料)が必要です．**2-1-2** と同じファイルです．
マウスで中心や半径を変え，円の変化を見ることが出来ます．　　line&circles.nbp

2-3. 極限円，等距離線

極限円や等距離線に関しても同様に描写できますが，割愛します．なお，**偽球の底面に平行な緯線は　極限円です．**「底円そのもの」も， H^+ の極限円「$y=1$」に対応しています．

2-4. 双曲的三角形

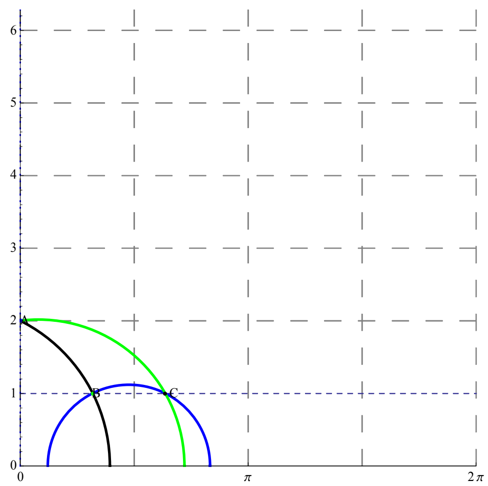
偽球は有限な領域しか表示できないので，極限円や直線の無限遠点における振る舞いを調べるにはあまり適しません．しかし「双曲三角形を見る」には有効です．

図 7 は　$A(2i), B(1+i), C(2+i)$　の双曲的三角形です．$AB = BC = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \fallingdotseq 0.96$,

$BC = \log(2+\sqrt{5}) \fallingdotseq 1.44$ で，$\angle A = \angle C \fallingdotseq 34°$, $\angle B \fallingdotseq 90°$ の ほぼ直角二等辺三角形です．偽球上で確かに直角二等辺三角形に見えます．また この三角形の内角和は，

$$34°+34°+90°=154°<180°$$

です．



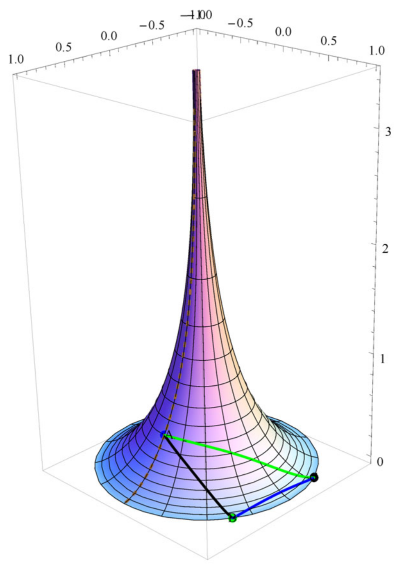


図 7

点 A,B,C を動かすと　奇妙な形の双曲的三角形も出来ます．次のリンクから ファイルをダウンロードして ご自分で動かしてみてください．なお三角形 ABCC については 次節で説明します．

2-4-1. Mathematica による検証

Mathematica6/7 または mathematica player (無料)が必要です．　triangle.nbp