# 3.「独立な曲面」としての偽球

偽球は本来，ポアンカレ上半平面 H+を埋め込んだ曲面ですが，それを忘れて，「偽球の上だけで，幾何がどのように成り立つのか」を考えて見ます．いわば 頭の良い蟻さんが偽球上に住んでいたらどのような幾何を作るか？　を考えます．蟻は偽球上を何周もするので，第１節④の変換 $g$；

$$\mathrm{Q}(x+iy) \xrightarrow{g} \mathrm{Q}'\left(\frac{1}{y}\cos x,\ \frac{1}{y}\sin x,\ f\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

の変域を H+ 上の領域 $y \geq 1$ に広げて考え，H+と対応させます．$g$ により H+上で $x$ 成分が $2n\pi$ 異なる２点 $\mathrm{A}(x+iy)$ と $\mathrm{A}'(x+2n\pi+iy)$ は 偽球上で同じ点に移ります．($n$ は整数)

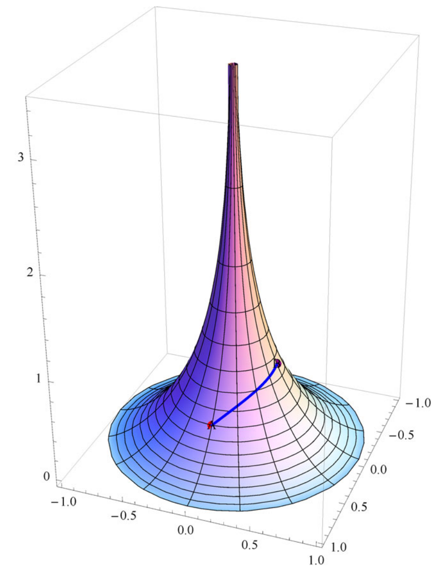
まず，ユークリッドの公準は，公準５を除くと，

公準１　異なる２点 A,B を通る線分はただ一本引ける．
公準２　線分は どちら側にも限りなく伸ばすことが出来る．
公準３　異なる２点 A,B が与えられたとき，A を中心とし B を通る円をただ一つ作れる．
公準４　直角は全て相等しい．

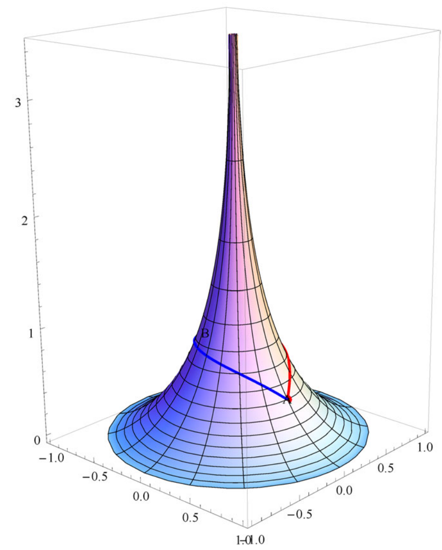
です．しかし，偽球は有限なので公準２は成り立ちません．また後で述べますが　公準１も成り立ちません．一方，公準３と公準４は成りたちそうです．従って「偽球上では双曲幾何が成り立つ」とよく言われますが，厳密な意味では　成り立ちません．しかし，円錐や円柱上で，ユークリッド幾何が成り立つ程度には，双曲幾何が成り立ちます．

## 3-1. 偽球上の最短距離線

A と B を結ぶ最短距離線は「点 A と点 B の偏角の差が $\pi$ のときは，2 本引けますが，それ以外のときは 1 つに決まります.」　（球面や円錐，円柱でも同様です.）右下図で，最短距離線 AB は「右回り」と「左回り」の 2 本あります．偏角の差が $\pi$ 以外の時は，最短距離線は 1 つに決まります.




$\mathrm{A}(2i),\ \mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2}+3i\right)$ のとき

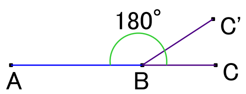



$\mathrm{A}(2i),\ \mathrm{B}\left(\pi+3i\right)$ のとき

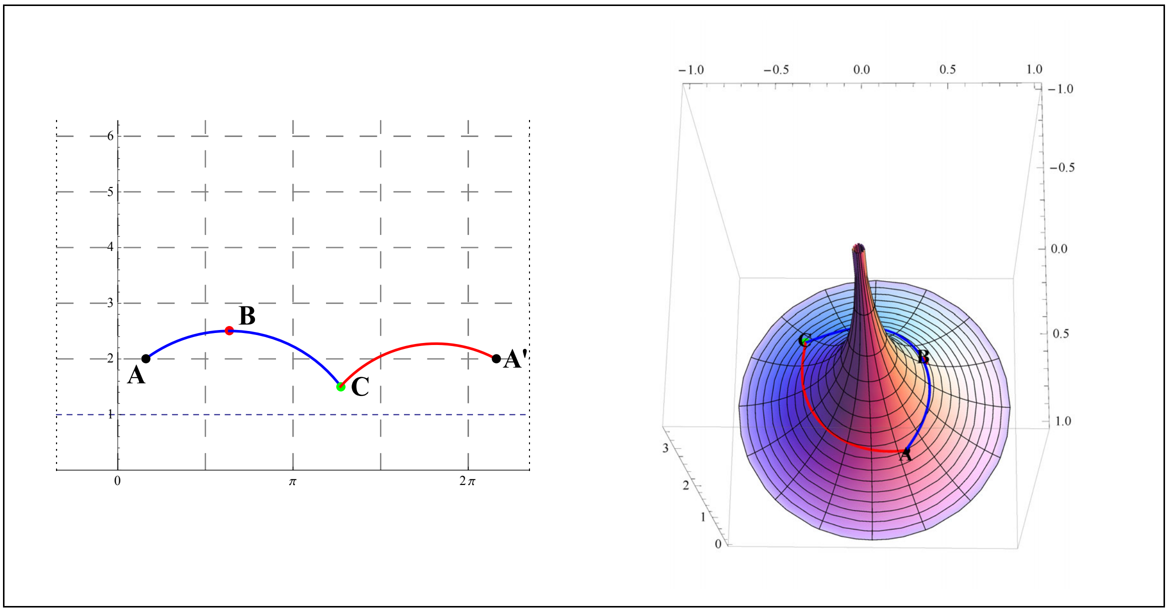
## 3-2. 偽球上の線分，直線

線分 AB を「A と B の最短距離線」と定義することができそうですが，しかし，この定義では　線分がうまく延長できません.

点 B の近くで，点 C を「角 ABC が180°」となる様に取ったとき，線分 AB+BC (和集合) を「線分 AC」と定義し，「線分 AB の B の側への延長」と呼びます.「線分 AB を線分 AC に延長する事」は, $H^+$に於いて A,B を通る双曲的半直線上に C を取る事と一致します.




しかしこの時，線分 AC は最短距離線とは限りません.（下図）




$H^+$上で $x$ 成分が $2n\pi(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 異なる 2 点 $A(x+iy)$ と $A'(x+2n\pi+iy)$ は 偽球上で同じ点に対応します.　上の例では A と C の $x$ 成分の差が $\pi$ を超えてしまったので，線分 AC の長さより，線分 A'C の長さが短くなります.　ゆえに線分 AC は最短距離線でありません.

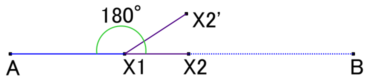
（もし A と C の $x$ 成分の差が ちょうど $\pi$ ならば，線分 AC と線分 A'C の長さは等しくなります. すなわち A と C の最短距離線は 2 本になります. 3-1 参照）

### 3-2-1. Mathematica による検証

Mathematica6/7 または mathematica player (無料)が必要です. サイズの変更は右下のメニューから，または図をクリックした後 drag して下さい.　example1.nbp

### 3-2-2. 延長可能性の方を重視して，線分を次のように定義します.

定義: 点 A に十分近い点 $X_1$ を取り 最短距離線 A $X_1$ を作ります. それを線分の場合と同様にして, 点 $X_1$ の側に延長をします. この操作を繰り返したとき その延長した線分が点 B を通るならば それを線分 AB と定義します. さらに線分 AB を可能な限り延長した線分（またはその極限）を直線 AB とします.



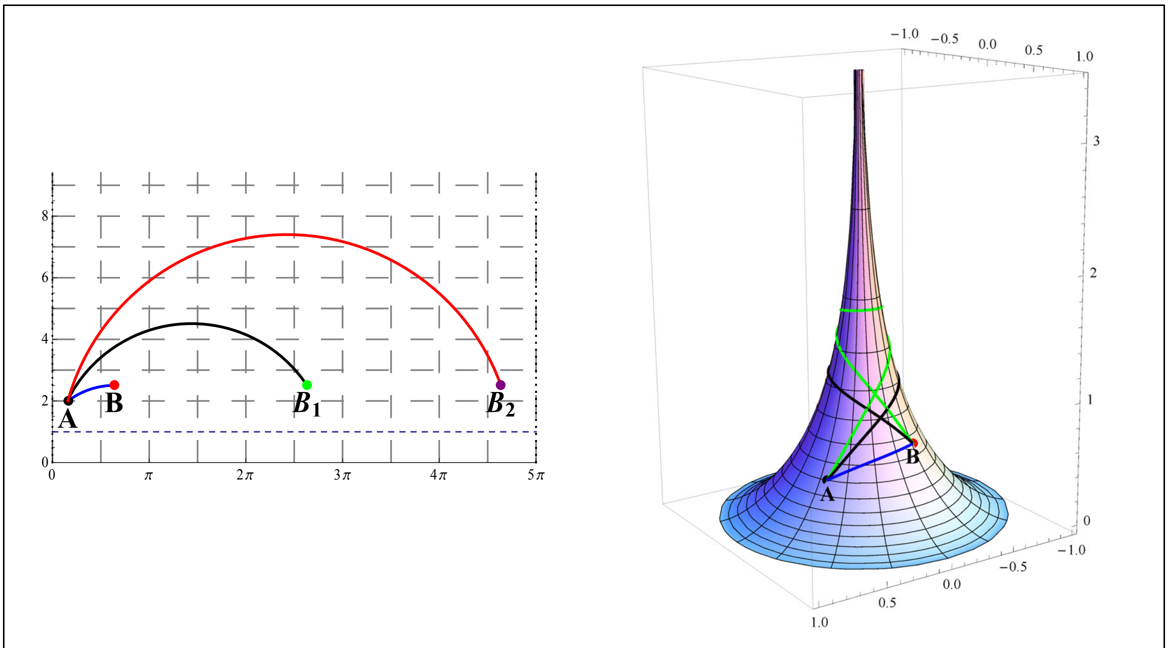

このとき, もはや線分は最短距離線とは限りません. また 2 点 A,B を通る線分は無数に出来ます. 直線 AB も一通りに決まりません.

### 3-2-3. $H^+$との対応

**偽球上の線分(直線)AB は, $H^+$ 上の双曲的線分(直線) $A_0B_0$ に対応します.** 但し偽球上では, A,B を通る線分 は無数にあります.

例えば, 下図で B, $B_1$, $B_2$ は, $x$ 成分のみ $2\pi$ ずつ異なり, 偽球上ではすべて点 B と同じ点に対応します. よって, $H^+$ 上の双曲的線分 AB ,$AB_1$, $AB_2$ は 偽球上で全て A,B を通る線分です. 双曲的線分 $AB_1$ は A と $B_1$ の $x$ 成分の差が $2\pi$ より大きいので, 対応する線分は 尖塔の周りを 1 周します. 同様に, 線分 $AB_2$ に対応する線分は 尖塔の周りを 2 周します.

さらに $H^+$ 上の双曲的線分 AB 上で十分近い任意の 2 点 P, Q を取ると, P と Q の最短距離線分は双曲的線分 AB に含まれます. 線分 $AB_1$, $AB_2$ に関しても同様です. **線分は「最短距離線の集まり」ですが, それを集めた「線分」は, もはや 最短距離線とは限りません.**



### 3-2-4. Mathematica による検証

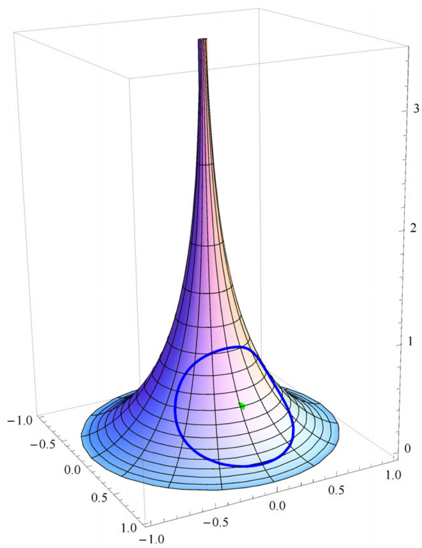
Mathematica6/7 または mathematica player (無料)が必要です．サイズの変更は右下のメニューから，または図をクリックした後 drag して下さい．

先の例を　マウスで動かして見ることが出来ます.　example2.nbp

直線 AB, 最短距離線 AB, または最短距離線分 PQ を自由にマウスで操作できます.　line.nbp

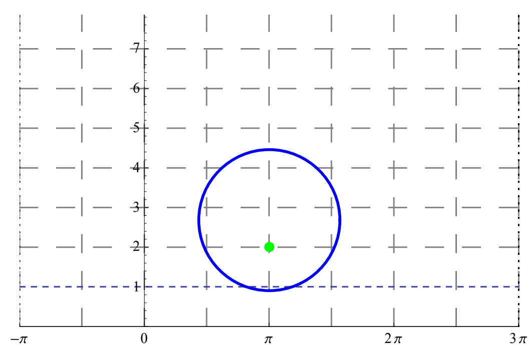
## 3-3.　偽球上の円

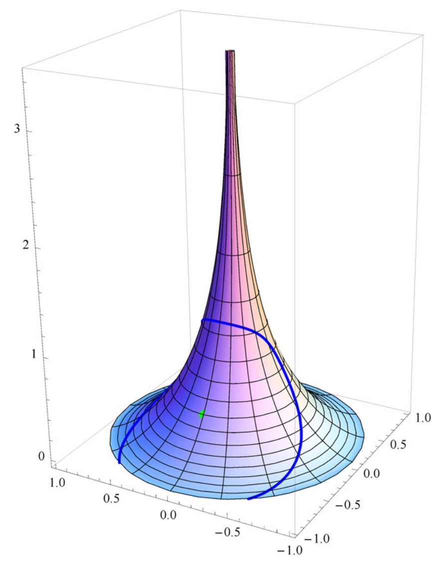
「線分」の一端 O を固定し，他の端 P を動かした時の軌跡 と 定義します．このように定めると，$H^+$ に於ける双曲的円を $g$ で移した図形が　偽球における円と一致します.



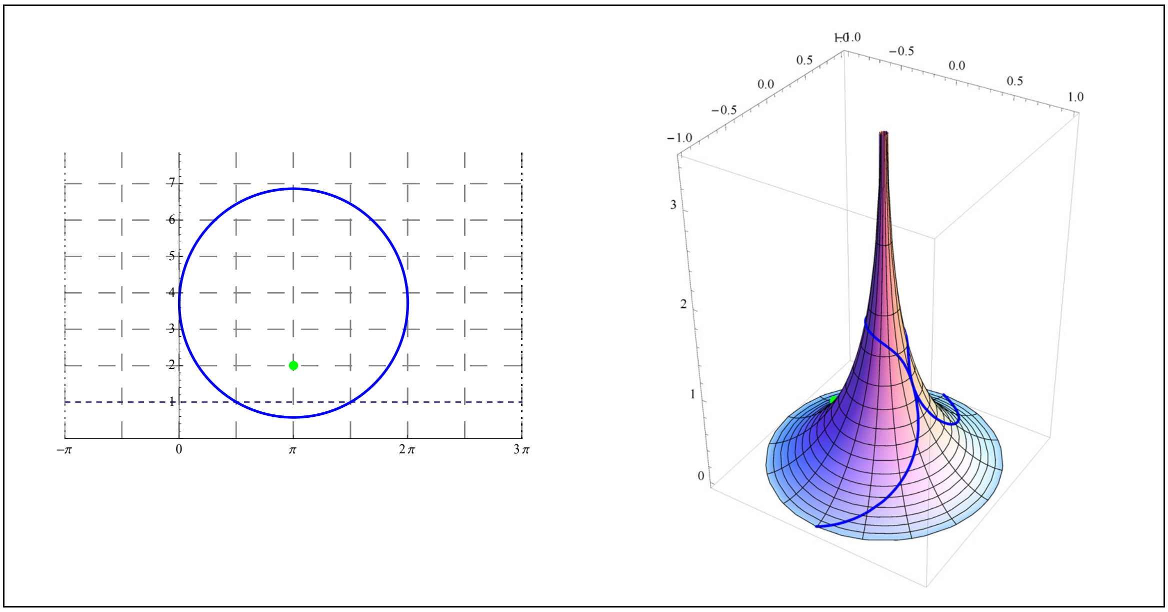

右の図は　中心が　$\mathrm{C}(2i)$，半径が $r = 0.5$，
下図は 中心が　$\mathrm{C}(\pi, 2)$，$r = 0.8$ の双曲的円　を　　偽球上に移した円です．これらの円は　普通の円に見えます.

しかし，**線分**と同様に，**円周**が尖塔の周りを何周もすることがあります.

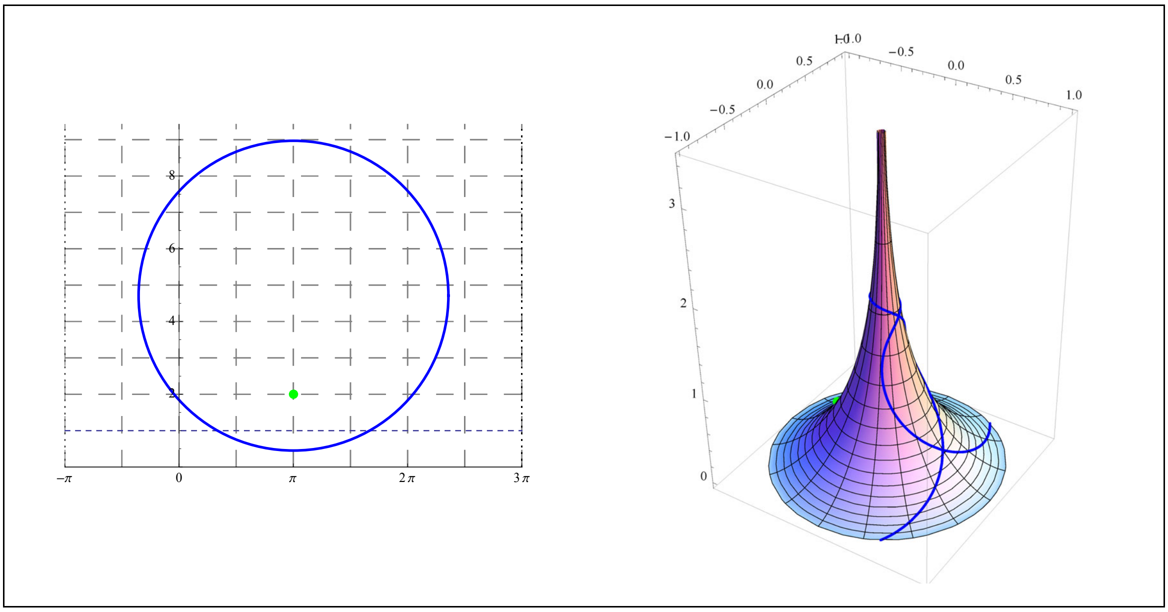


次の図は 中心が$C(\pi,2)$ , $r=\log\dfrac{\sqrt{4+\pi^2}+\pi}{2}\fallingdotseq 1.2334$ の円です．このとき H+ では，円は $0\le x\le 2\pi$ の範囲に有ります．よって偽球上では，$\theta=0$ の経線上で円周が接します．この接点は H+ では $x=0,\ x=2\pi$ の点に当たります．




さらに，半径を大きくすると，円周は尖塔に巻きついていきます．下図は 中心が $C(\pi,2)$ , $r=1.5$ の円です．$\theta=0$ の経線をまたぎ両側で $60°$ ぐらいづつ はみ出しています．




### 3-3-1. Mathematica による検証

ご自分で 中心や半径を変えて 円を作ってみてください．また「**半径表示**」にチェックを入れ，半径を回転させると，H+上の円と偽球上の円の対応が良く分かります． circle.nbp

## 3-4.　偽球上の三角形

### 3-4-1.　「閉じた三角形」と「開いた三角形」

偽球上の三角形ABCの「辺AB」を「線分AB」と定義します．さらに線分AB，BC，CAに対応するH+ 内の線分を それぞれ$c$ , $a$ , $b$ と書くことにします．線分$c$ , $a$ , $b$ は水平に$2n\pi$ 平行移動しても，偽球では同じ線分を表します．よって適当なH+ 内の平行移動によって，線分$a$ と$c$ は1点$B_0$を共有させることができます．このとき線分$c$ の他の端点を$A_0$，線分$a$ の他の端点を$C_0$とすると，線分$b$ の端点を$A_0$と重ねても，$b$ の他の端点$C_1$は$C_0$と一致するとは限りません．$C_0$と$2n\pi$ ずれているかも知れません．以上から，偽球上の三角形には2種類あることが分かります．(「開いた三角形」と言っていますが，それはH+ 内での話で，偽球上ではもちろん閉じています．)

**(ア) 閉じた三角形**

　対応するH+ 内の線分が，　H+ 内でも三角形を作るタイプ．

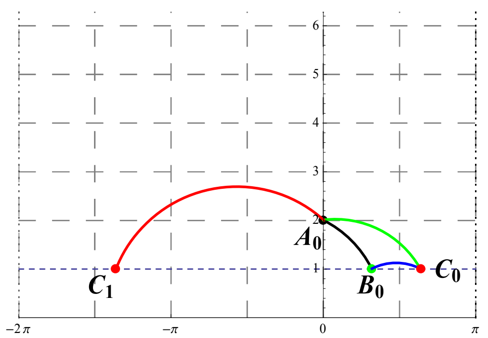
**(イ) 開いた三角形**

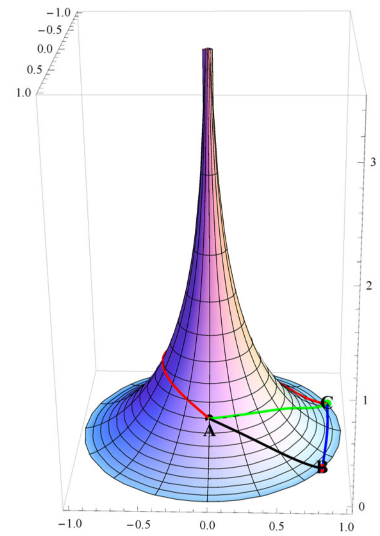
　対応するH+ 内の線分が，　H+ 内で三角形を作らないタイプ．

(但し「対応するH+内の線分を実軸と平行に$2n\pi$ 平行移動して重なる線分は同一視する」とします．)

「閉じた三角形」では，双曲幾何の三角比の関係が成り立ちます．「開いた三角形」では 成り立ちません．

例1.　線分AB, BCと緑色の線分ACで作られた三角形が「閉じた三角形」です．線分AB, BCと赤色の線分ACで作られた三角形が「開いた三角形」です．H+上，$A_0(2i)$ ,$B_0(1+i)$ ,$C_0(2+i)$ です．
このとき，　「閉じた三角形」では $\angle A=34^\circ,\angle B=90^\circ,\angle C=34^\circ$ で，内角の和は 157°　です．
しかし，「開いた三角形」では $\angle A=165^\circ,\angle B=90^\circ,\angle C=85^\circ$ で，内角の和は 340°　となります．

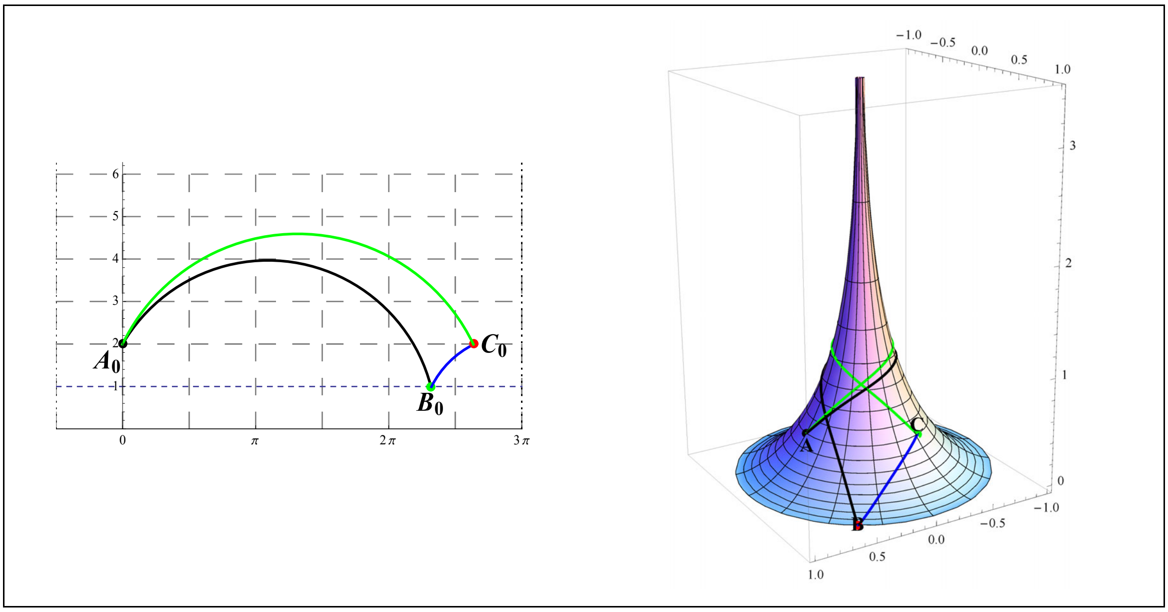



大雑把に言って　「開いた三角形」は偽球の尖塔を内部に含み，「閉じた三角形」は含みません．

**例 2.**　$A_0(2i), B_0(7+i), C_0(8+2i)$ です．△ABC は「閉じた三角形」ですが，線分 AB と AC は尖塔を一周しています．しかし，この場合でも 双曲三角比は成り立ち，かつ，$H^+$の双曲的角度や双曲的長さは，偽球上のユークリッド角度や長さとして測ることができます．

$\angle A_0 = 5^\circ, \angle B_0 = 42^\circ, \angle C_0 = 90^\circ$ ですが，偽球でもそのように見えます．




## 3-4-2. Mathematica による検証

第 2 節と同じファイルです．三角形 ABC とあるのが「閉じた三角形」で，三角形 ABCC とあるのが「開いた三角形」です．　簡単のため，$C_0$ と $C_1$ の差は $2\pi$ に固定してます．

[triangle.nbp]

上のファイルの 点 A,B,C の動く変域を「 $-2\pi \le x \le 4\pi$ 」に拡大したものです．

[wide_triangle.nbp]