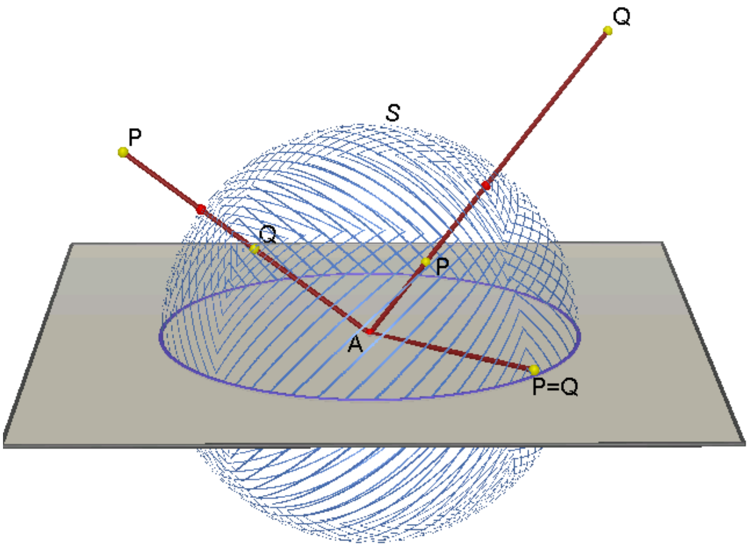
半球面モデル

1. 球に関する鏡像

1-1. 鏡像の定義

球に関する鏡像を，円に関する鏡像と同様に定義します．半径 R で中心が A の球 S に関する鏡像で，点 P が点 Q に移るとすると，

$$\text{Q が半直線AP上にあり，かつ}\quad \mathrm{AP}\times\mathrm{AQ}=R^2$$



1-2． 鏡像変換の式

特に，球 S の中心が O(0,0,0)，半径が R とすると，平面の鏡像と同様に，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OQ}\times\mathrm{OP}}{\mathrm{OP}\times\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{R^2}{x^2+y^2+z^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

よって，O 中心，半径 r の球に関する点 P の鏡像は，

$$\boxed{\mathrm{Q}\left(\frac{R^2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{R^2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{R^2z}{x^2+y^2+z^2}\right)}$$

1-3. 鏡像変換の性質

1-3-1. 球-球対応

円に関する鏡像と同様の性質が成り立ちます．例えば，中心が A の球 S に関する鏡像では，

「A を通らない球の鏡像は球」

-左下図で赤い 2 つの球は，S に関して互いに鏡像です.

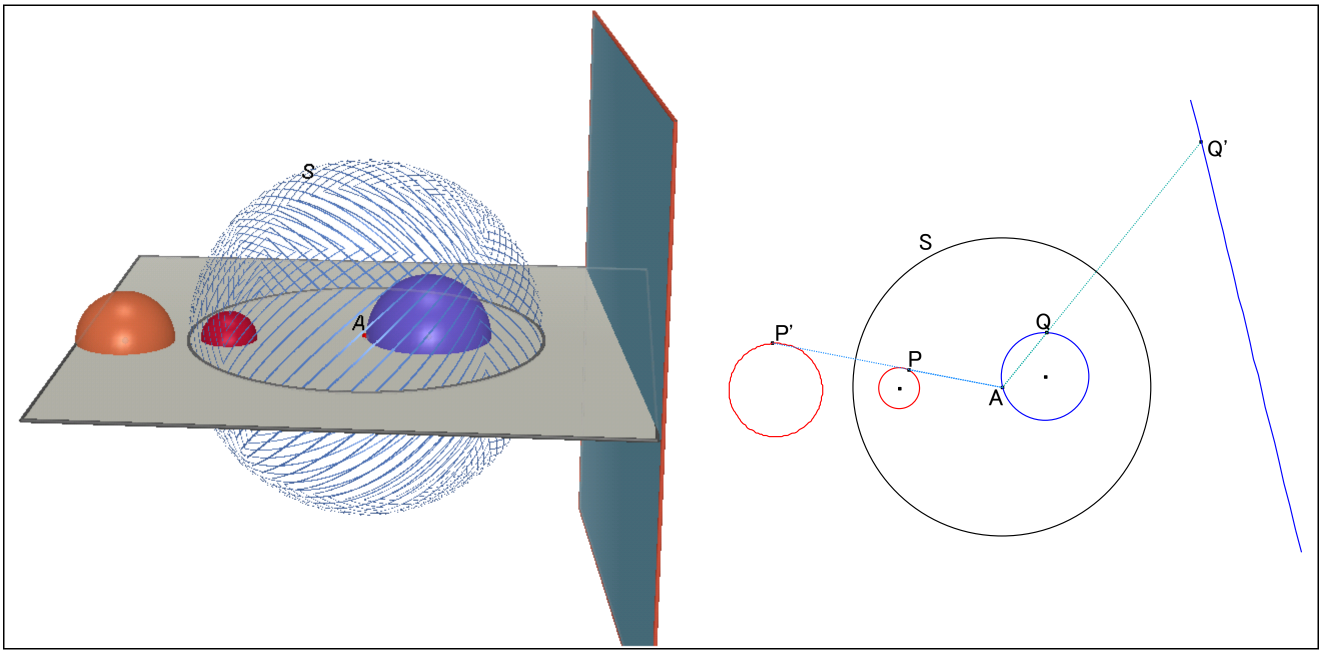
「A を通る球の鏡像は原点を通らない平面」,「A を通らない平面の鏡像は A を通る球」

-青い球と平面は，S に関して互いに鏡像です.

となります．これは,「A と(鏡像をとる) 球の中心を結ぶ直線」または「A から平面に下ろした垂線」を含む断面図を考えると解かります.（右下図で，赤い球の断面は赤い円，青い球の断面は青い円です.）

平面の時と同様に，平面と球を合わせて「一般化された球」とし，太字の**球**で表すと，

球は球に移ります



CabriⅡによる検証（球－球対応)

下図で A,B,C(平面上の 3 点),D(球の中心),E(球上の一点),K(球上の一点)を動かしてみてください.
A',B',C',E'は，O を中心とし K を通る球に関する鏡像です. mirror of spheres 1 .html,

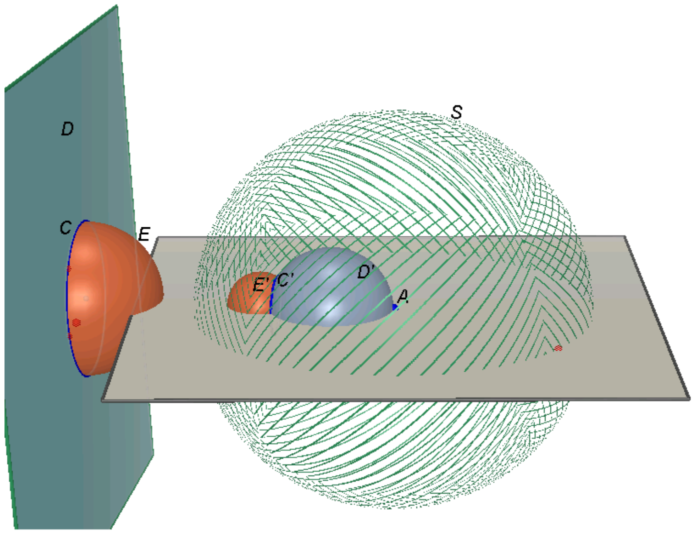
断面図です．A,P,Q,S, 2 円の中心を drag してください. mirror of spheres2.html

1-3-2. 円-円対応

さらに，一般化された円（円または直線）を太字の**円**で表すと，「**円**は**球**と**球**の交線で表すことができ，**球**は**球**に移り，**球**と**球**の交線は**円**」なので，

円は円に移ります

例えば，右図で，中心 A の球 S に関する鏡像を f，空間内の円を C とします．C は適当な球 E と平面 D の交線と見ることができ, D,E の像はそれぞれ球 D'と球 E'となるので, 円 C の像は円 C'となります.



CabriⅡによる検証（円－円対応）

mirror of circles.html

1-3-3．等角性

点 O を中心とする球 S に関する鏡像を f，2 曲線 C_1, C_2 の f による像を，それぞれ C_1', C_2' とすると，C_1' と C_2' のなす角は，C_1 と C_2 のなす角と等しくなります．すなわち，

鏡像変換は，角度を保ちます

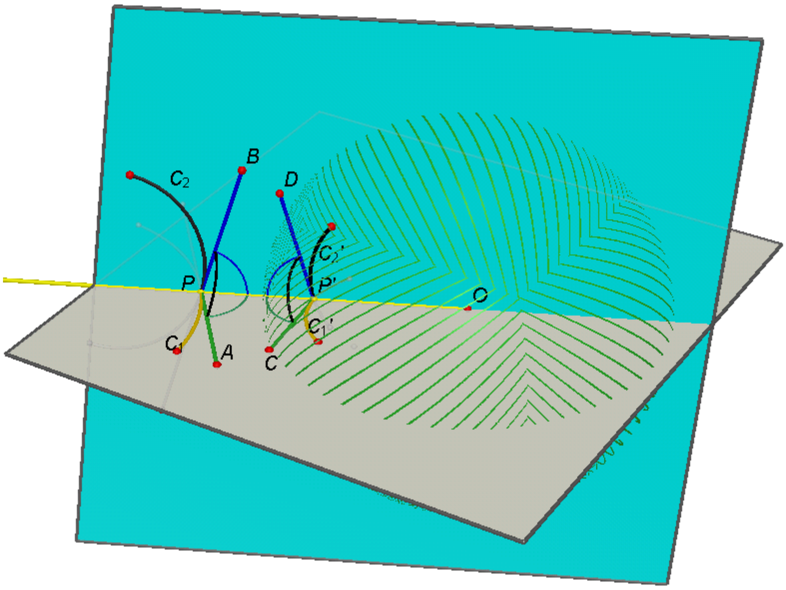
[証明] C_1, C_2 の交点を P，f による P の像を P' とします．C_1, C_2 の点 P に於ける接線上に点 A,B を，C_1', C_2' の点 P' に於ける接線上に点 C，D をとると，P，P',O,A,C と，P,P',O,B,D は，それぞれ同一平面上にあります．「平面上の鏡像変換は角度を保つ」ので，

$$\angle APP' = \angle CPP' \quad \text{かつ} \quad \angle BPP' = \angle DPP' \quad \text{（図の青と緑の角）}$$

ゆえに，線分 PP'の垂直２等分面に関して対称移動すれば，「半直線 $PA \to P'C$，半直線 $PB \to P'D$」となるので，

$$\angle APB = \angle CP'D \quad \text{（図の黒の角）}$$

[Q.E.D]

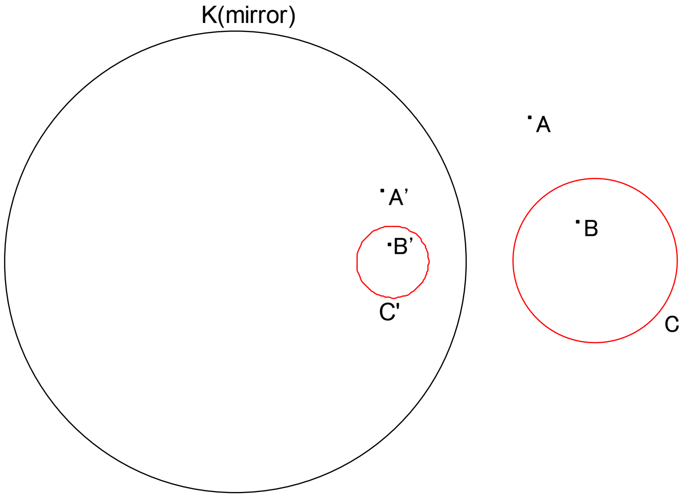


CabriⅡによる検証(等角性)

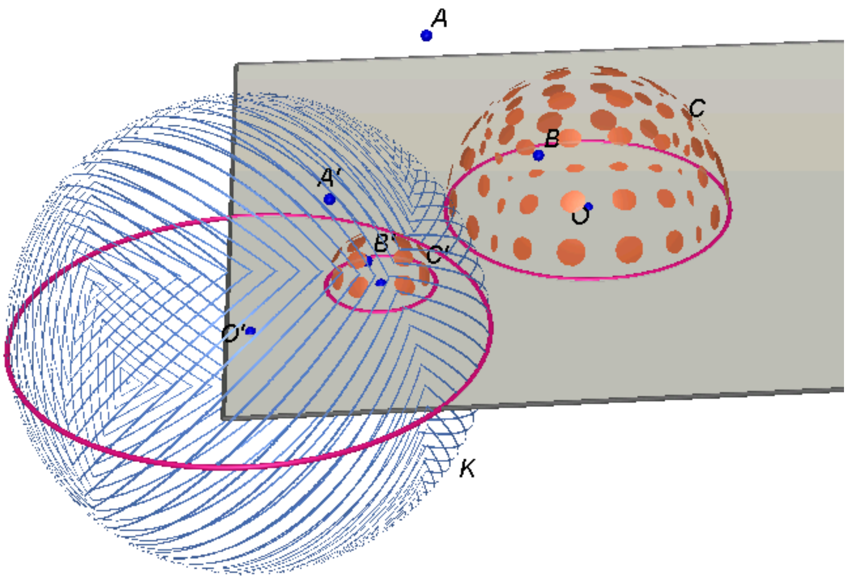
球に関する鏡像のとき	P,A,B,O,K を動かしてみてください．	mirror of angle1.html
円に関する鏡像のとき	P,A,B,O,K を動かしてみてください．	mirror of angle2.html

1-3-4. 鏡像原理

円に関する鏡像では，点 A と点 B が円 C に関して鏡像の時，円 K に関する点 A,B,C の像をそれぞれ A',B',C' とすると，A' と B' は，C' に関しても鏡像になっていました．すなわち，K という鏡に映しても，対称なペアは やはり対称なペアです．



これと同様に，点 A と点 B が球 C に関して鏡像の時，球 K に関する点 A,B,C の像をそれぞれ A',B',C' とすると，A' と B' は，C' に関して鏡像になります．これは，C の中心 O と K の中心 O'と点 A を含む平面を考えると，明らかです．



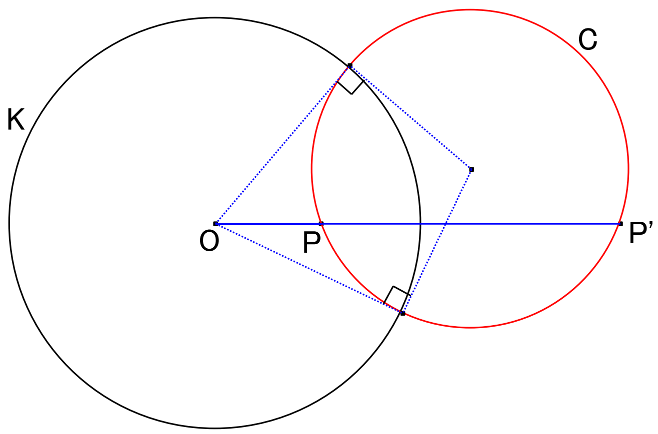
Cabri II による検証(鏡像原理)

円に関する鏡像	Drag A,B,C,O,O',K	mirror principle1.html,
球に関する鏡像	Drag A,B,C,O',K	mirror principle2.html,

1-3-5. 直交する球に関する性質

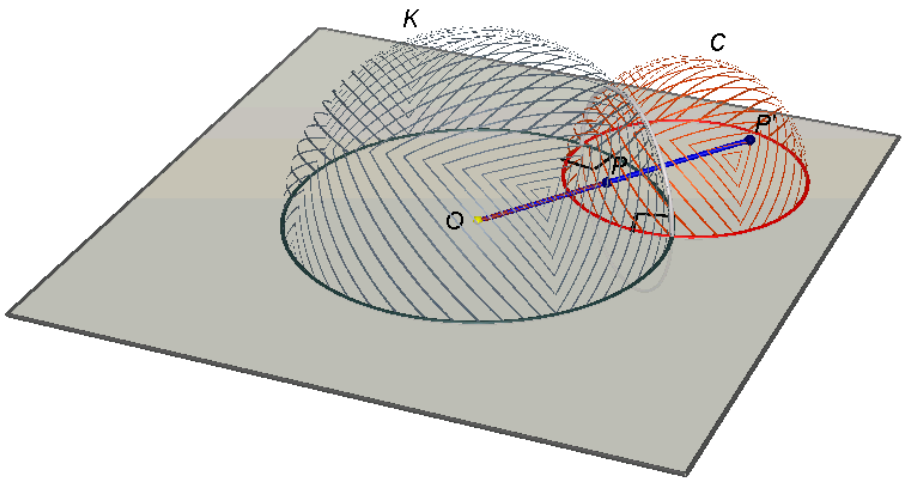
円に関する鏡像では，次の性質が成り立ちます.

P と P’が円 K に関し鏡像のとき，P と P’を通る円 C と K は直交します．逆に円 C と円 K が直交しているとき，円 C 上の点 P と O を結ぶ半直線と C の P 以外の交点を P’とすると， P と P’ は K に関し鏡像となります.



これと同様に，

P と P’が球 K に関し鏡像のとき，P と P’を通る球 C と K は直交します．逆に球 C と球 K が直交しているとき，球 C 上の点 P と O を結ぶ半直線と C の P 以外の交点を P’とすると， P と P’ は K に関し鏡像となります.



これも C の中心と，点 O,点 P を通る平面による断面を考えると明らかです.

Cabri II による検証(直交する 2 球)

円に関する鏡像　　P,C,K,O を drag して下さい.　　　　　　　　perpendicular circles.html,
球に関する鏡像　　P,C と黄色の点を drag して下さい.　　　　　　perpendicular spheres.html,

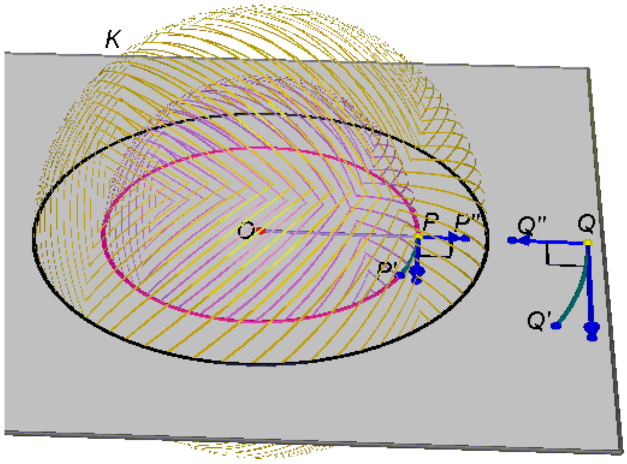
1-3-6. 「微小距離の変換」の等方性

K は中心が O で半径が 1 の球とします．
P と P’ は球 K に関し鏡像とし，P が微小距離 dp 動いた時に Q の動く微小距離を dq とします．

右図では P’の像が Q’, P”の像が Q”です．従って，

$$\begin{cases} dp \fallingdotseq |\mathrm{PP'}| \text{ のとき，} & dq \fallingdotseq |\mathrm{QQ'}| \\ dp \fallingdotseq |\mathrm{PP''}| \text{のとき，} & dq \fallingdotseq |\mathrm{QQ''}| \end{cases}$$

です．



(i) P が動径 OP と垂直な方向に動く時．（P が上図の P’へ動く時.）
P が微小距離動く時は，P は O を中心とした円周上を動き「OP=OP’」と考えてよいから，P も P’も O を中心とした相似比の等しい相似変換で Q や Q’に移されます．よって

$$dp : dq = \mathrm{OP} : \mathrm{OQ}, \qquad \therefore dq = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} dp = \frac{\mathrm{OQ} \times \mathrm{OP}}{\mathrm{OP} \times \mathrm{OP}} dp = \frac{1}{\mathrm{OP}^2} dp \cdots ①$$

(ii) P が動径 OP 方向に動く時．（P が上図の P”へ動く時.）
対称性から，半直線 OP を x 軸正方向にとっても一般性を失いません． $\mathrm{Q}(X, Y, Z)$ とおくと，

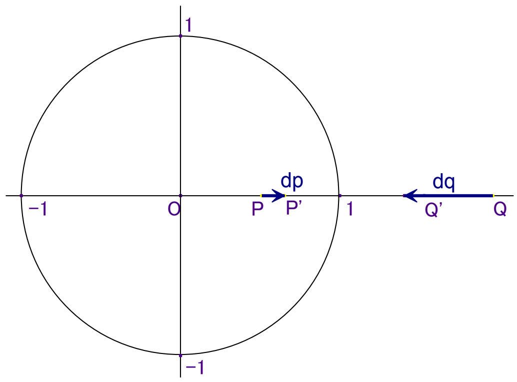
$$X = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}, \qquad Y = Z = 0$$

したがって，

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{dZ}{dx} = 0$$

よって，P が dx 動いた時の，Q の微小変移は

$$\overrightarrow{dq} = \begin{pmatrix} \dfrac{dX}{dx} \\ \dfrac{dY}{dx} \\ \dfrac{dZ}{dx} \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx$$



ゆえに Q の微小移動距離は

$$dq = |\overrightarrow{dq}| = \frac{1}{x^2} |dx| = \frac{1}{\mathrm{OP}^2} dp \cdots ②$$

(i),(ii)より，P が動径方向に動いても，動径と垂直方向に動いても， dp と dq の比は一定となります．
即ち，P の動く方向に寄らず，

$$dq = \frac{1}{\mathrm{OP}^2} dp = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dp \cdots ③$$

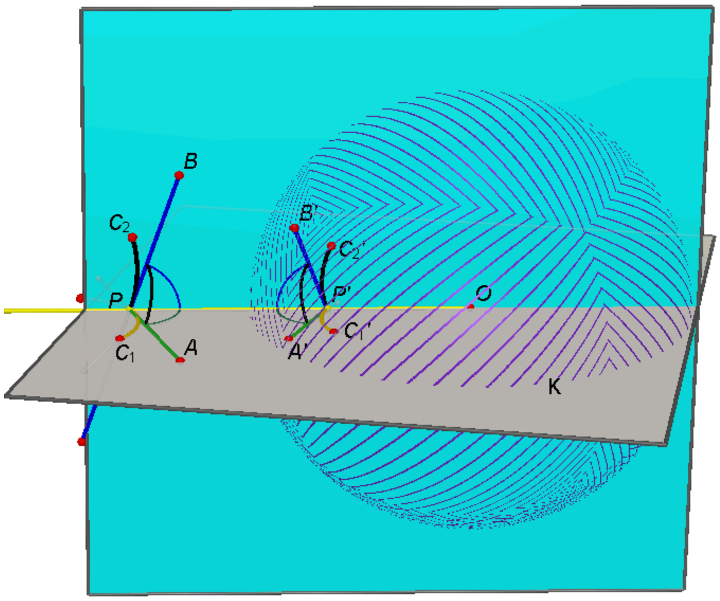
以上はKの半径が1の時でしたが，Kの半径がr，中心がOのとき，$\mathrm{P}(x,y,z)$のKに関する鏡像をQとすると，Pが微小距離dp動いた時にQの動く微小距離dqは，

$$\boxed{dq=\frac{r^2}{\mathrm{OP}^2}dp=\frac{r^2}{x^2+y^2+z^2}dp\cdots(*)}$$

「dpとdqの比がPの動く向きによらない」のが特徴です．（これを**等方性**と呼ぶことにします.）

「**等方性**」は，**1-3-3.** の「**等角性**」と， **同値**　です.

点Oを中心とする球Sに関する鏡像をf，
2曲線C_1,C_2の交点をP，Pに於ける接線上に点A,Bをとり，A,Bのfによる像をA',B',
またC_1,C_2,Pの像をC_1',C_2',P'とします.



いま，仮に△APBが「PA=PB=AB」の正三角形とすると，A,Bが非常にPに近い時，「**等方性**」から，

$$\frac{\mathrm{P'A'}}{\mathrm{PA}}=\frac{\mathrm{P'B'}}{\mathrm{PB}}=\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}}\qquad\therefore \mathrm{P'A'=P'B'=A'B'}$$

よって，$\angle\mathrm{A'P'B'}=\angle\mathrm{APB}=60^\circ$となり，「**等角性**」が成り立ちます.

逆に，△APBが「$\mathrm{PA=PB=AB}\fallingdotseq 0$」の正三角形のとき，「**等角性**」から，

$$\angle\mathrm{A'P'B'}=\angle\mathrm{APB}=60^\circ,\ \angle\mathrm{P'B'A'}=\angle\mathrm{PBA}=60^\circ,\ \angle\mathrm{B'A'P'}=\angle\mathrm{BAP}=60^\circ$$

$$\therefore \mathrm{P'A'=P'B'=A'B'}\qquad\therefore\frac{\mathrm{P'A'}}{\mathrm{PA}}=\frac{\mathrm{P'B'}}{\mathrm{PB}}=\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}}$$

よって，「**等方性**」がなりたちます.

結局，「**等方性**」も「**等角性**」も　「**A,BがPに非常に近い時は，△APB∽△A'P'B'となる**」ことを表しているので，一方が成り立てば他方も成り立ちます.

［以下は覚書です］

［注1］ 鏡像変換以外に等方性のある変換はあるでしょうか?

一般に $\mathrm{P}(x,y,z)$ から $\mathrm{Q}(X,Y,Z)$ への変換が

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = f(r)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = f(r)x \\ Y = f(r)y \\ Z = f(r)z \end{cases} \qquad \cdots(**)$$

$$(\text{但し } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\, f(r)>0,\, f(r) \text{ は定数でない})$$

で与えられているとします．すなわち Q が半直線 OP 上にあり，拡大率 $f(r)$ が原点からの距離のみの関数とします．本文と同様に考えて，

(i)P が動径と垂直方向に移動する時,

$$dq = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}dp = f(r)\,dp \cdots ①$$

(ii) P が動径 OP 方向に動く時.
対称性から，半直線 OP を x 軸正方向にとっても一般性を失いません．$\mathrm{Q}(X,Y,Z)$ とおくと，

$$X = f(r)x = x\,f(x) \qquad (\because r^2 = x^2+y^2+z^2 = x^2)$$

したがって,

$$\frac{dX}{dx} = \{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$$

よって，P が dx 動いた時の，Q の微小移動量は

$$dq = |f(x)+xf'(x)||dx| = |f(r)+rf'(r)|\,dp \cdots ②$$

ゆえに,「dp と dq の比が P の動く向きによらない」必要十分条件は，①，②より,

$$f(r) + rf'(r) = \pm f(r) \quad \cdots ③$$

右辺の符号が正のとき,「$rf'(r)=0$」．ところが $f(r)$ は定数でないので，矛盾．符号が負のとき,

$$f(r)+rf'(r) = -f(r) \Longleftrightarrow 2f(r) = -rf'(r) \Longleftrightarrow f(r) = \frac{C}{r^2} \quad (C \text{ は正の定数})$$

ゆえに,（**）の形の変換で,「dp と dq の比が P の動く向きによらない」のは，鏡像変換だけです.

［注２］純粋な計算だけで，「等方性」や「等角性」を証明することも出来ます．

一般に，P が $dp=\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ だけ変化した時の，Q の変化を $dq=\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

この 3×3 行列を J とおくと，

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}=J\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}\cdots①$$

両辺を転置して，

$$\left(dX,dY,dZ\right)=(dx,dy,dz)\ J^t\cdots②$$

①，②の各辺の行列の積を取って

$$\left(dX,dY,dZ\right)\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}=(dx,dy,dz)J^tJ\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}\cdots③$$

ここで，$(X,Y,Z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ のとき，単純計算で，

$$J^tJ=\begin{pmatrix} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに，

$$dX^2+dY^2+dZ^2=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}(dx^2+dy^2+dz^2),\qquad \therefore dq=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}dp$$

即ち，dp と dq の比は P の動く向きによりません．

また，内積：

$$(dX', dY', dZ')\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = (dx', dy', dz')J^{t}J\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

を考えると，「等角性」も計算で出せます.