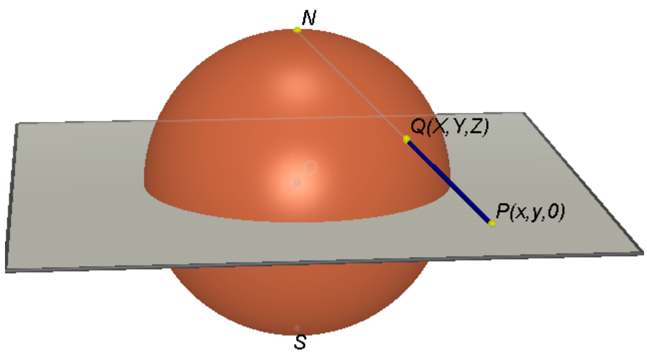
２． 立体射影

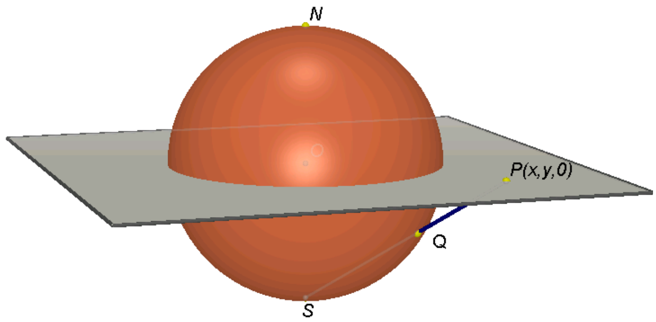
2-1. 定義

xyz 空間において，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,y,0)$ から，単位球面 $\Omega: x^2+y^2+z^2=1$ 上の点 $\mathrm{Q}(X,Y,Z)$ への左下図または右下図のような対応を「**立体射影**」と言います．すなわち Ω の北極を $\mathrm{N}(0,0,1)$，南極を $\mathrm{S}(0,0,-1)$ とすると「P に線分 NP(または SP)と球の交点 Q を対応させる変換」が「**立体射影**」です．以下，この節では「見易い」ので，左下図のような対応を「立体射影」と呼びます．逆に第 3 節では，右下図の対応を「立体射影」と呼びます．

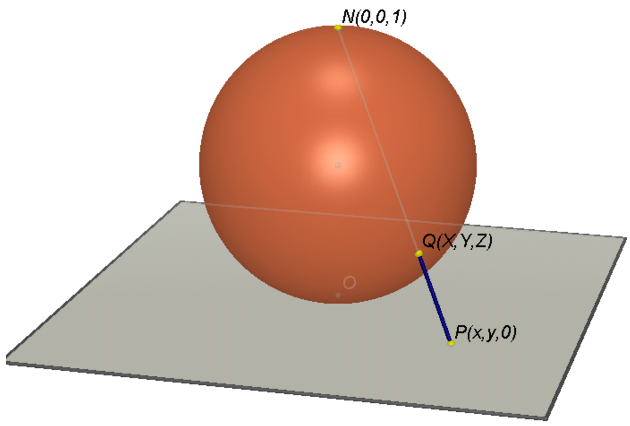
また **立体射影**は，xy 平面に無限遠点を付け加えた平面から単位球への**連続な 1 対 1 写像**となります．

さらに，Ω 上の点 Q に xy 平面(無限遠点を含む)上の点 P を対応させる変換も考えられますが，こちらも「**立体射影**」と呼びます．

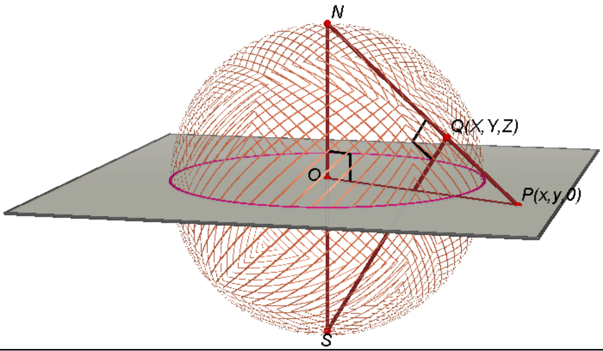


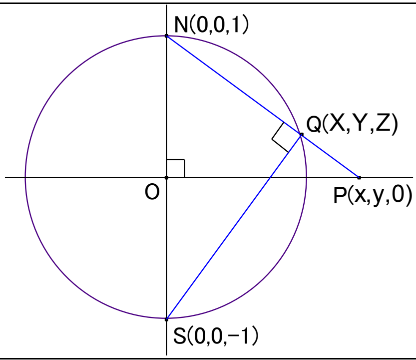


［注］下図のように，$\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の球面 $\Sigma: x^2+y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ の北極を $\mathrm{N}(0,0,1)$ とするとき，xy 平面上の点 P に，線分 NP と Σ の交点 Q を対応させる対応も「立体射影」と言います．しかしここでは,「立体射影」は,「Ω の上への立体射影」を指すものとします．立体射影の詳しいことについては,「双曲幾何学への招待」をお読みください．



2-2.　式による表現





平面 NPS 上で考えます．△OPN ∽△QSN だから，

$$\mathrm{NP}:\mathrm{NO}=\mathrm{NS}:\mathrm{NQ} \Longleftrightarrow \mathrm{NP}:1=2:\mathrm{NQ} \qquad \therefore \mathrm{NP}\times\mathrm{NQ}=2 \qquad \cdots①$$

よって，　$\mathrm{P}(x,y,0)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{NQ}}=\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{NP}}\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\frac{\mathrm{NP}\times\mathrm{NQ}}{\mathrm{NP}^2}\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\frac{2}{x^2+y^2+1}\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\frac{2}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix}x\\y\\-1\end{pmatrix}$$

ゆえに，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{NQ}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix}x\\y\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix}2x\\2y\\x^2+y^2-1\end{pmatrix}$$

従って，Q の座標は，

$$\boxed{\mathrm{Q}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)}$$

2-3.　立体射影と鏡像

2-2 の①式は，次の式でした．

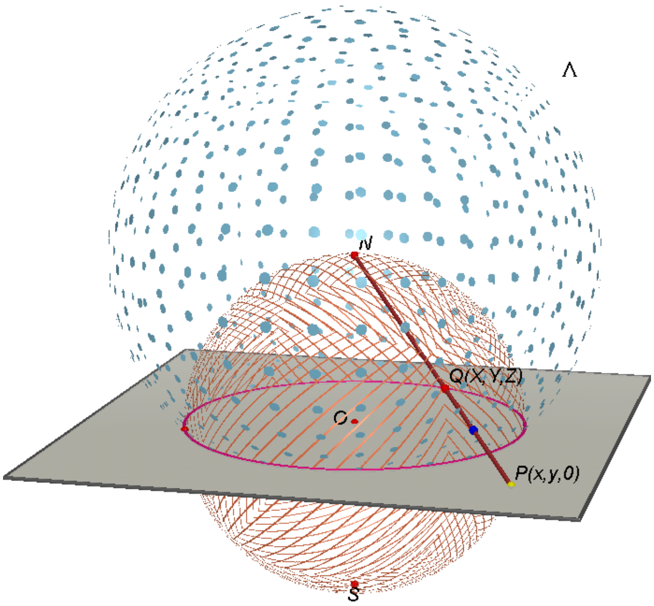
$$\mathrm{NP}\times\mathrm{NQ}=2\cdots①$$

「中心が N，半径 $\sqrt{2}$ の球」を Λ とすると，①は

P と Q が，互いに，Λ に関する鏡像となる

ことを表しています．ゆえに，

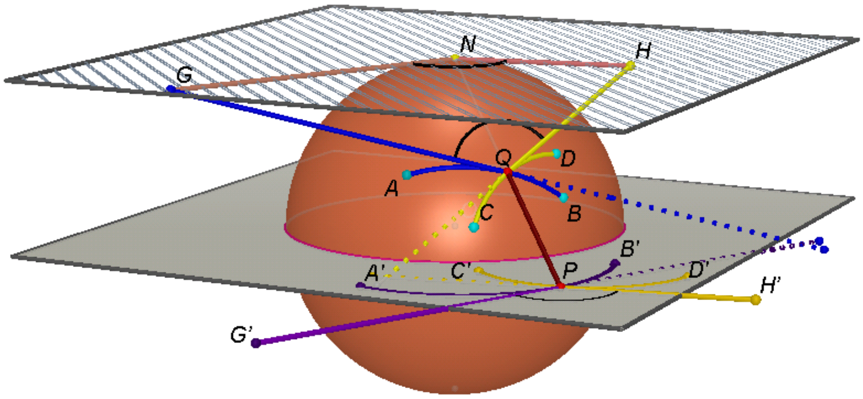
球に関する鏡像の性質と同様の性質が，立体射影でも成り立ちます．特に「等角性」と「円-円対応」が成り立ちます．



2-4. 立体射影の性質

2-4-1. 等角性

xy 平面上の 2 曲線 C_1', C_2' の立体射影を C_1, C_2 とします．このとき C_1, C_2 のなす角と C_1', C_2' のなす角は等しくなります．（下図では $\angle \mathrm{G'PH'} = \angle \mathrm{GQH}$.）すなわち，立体射影は，角度を保ちます．



これは，「鏡像変換の性質より明らか」ですが，次の証明が有名なので，ここに書きます．（「複素数と非ユークリッド幾何」より）

［証明］ xy 平面上の曲線 C_1 上に点 A',B',曲線 C_2 上に C',D'を取り， C_1, C_2 の交点を P， 点 A,B,C,D,P の立体射影を A,B,C,D,Q とします． さらに， Q に於ける C_1, C_2 の接線と平面 $z=1$ の交点を， それぞれ G,H とおき，G と H を $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ だけ平行移動した点をそれぞれ G',H'とします．この時，平面 NGQ と xy 平面との交線が PG' なので，直線 PG'は曲線 A'B'の接線となります．同様に，直線 PH'は曲線 C'D'の接線となります．よって，曲線 A'B'と曲線 C'D'のなす角は $\angle \mathrm{G'PH'}$ ． しかし「GG'//NP//HH'」だから，

$$\angle \mathrm{G'PH'} = \angle \mathrm{GNH} \cdots ①$$

ところが「球外の一点から，球に引いた接線の長さは等しい（円錐の側面を作る)」から，

$$\mathrm{GQ} = \mathrm{GN} \text{ かつ } \mathrm{HQ} = \mathrm{HN}$$

ゆえに，「$\triangle \mathrm{NGH} \equiv \triangle \mathrm{QGH}$ 」となるので，

$$\angle \mathrm{GNH} = \angle \mathrm{GQH} \cdots ②$$

①，②より，

$$\angle \mathrm{G'PH'} = \angle \mathrm{GQH}$$

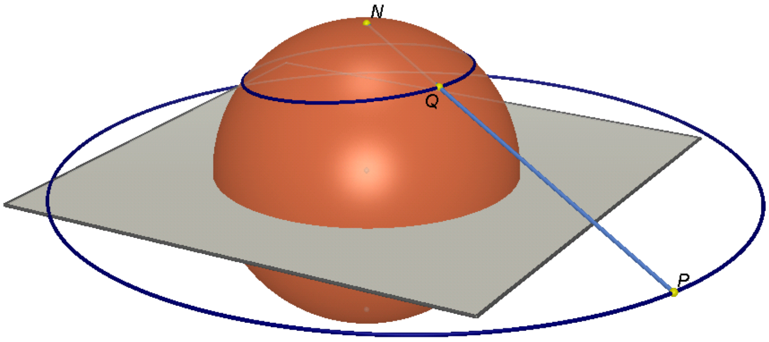
(Q.E.D)

Cabri3D による検証(立体射影の等角性)

点 Q,A,B,C,D を動かしてみてください．因みに曲線 AB,CD 上にある薄緑の点も動かすことが出来ます．
球面上の図形を xy 平面上の図形に移しています． angle.html

2-4-2. 円－円対応

Ω の上の曲線を C'，その xy 平面の上へ立体射影を C とします．C' が円となる時は，C も円または直線となります．逆に C が円または直線のときは，C' も円になります．



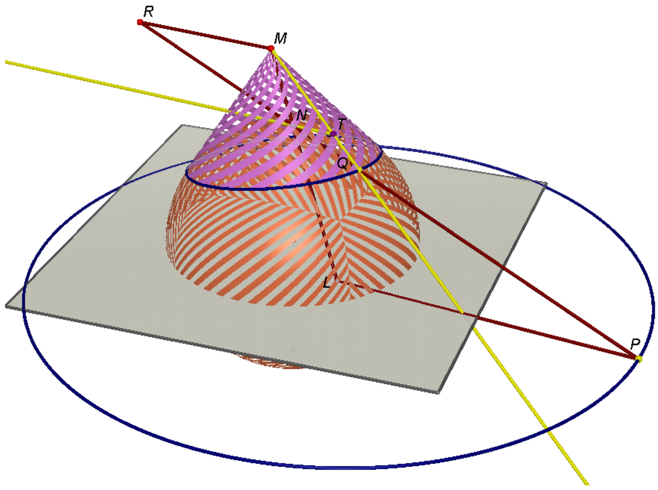
これも，「鏡像変換の性質より明らか」ですが，次の証明が「複素数と非ユークリッド幾何」に載っていて面白かったので，ここに書きます．

［証明］

C' が極 N を通る円のとき，C は直線です．逆に C が直線のとき，C' は N を通る円となります．

C' が N を通らない円のとき，C' 上の任意の点に於ける接線は, 一点 M で交わります. (M は C' を底円とした直円錐の頂点となります.）

以下，C' を固定して考えて，C' 上に動点 Q をとり，Q の xy 平面への立体射影を P, 直線 MN と xy 平面の交点を L, さらに M,N を通り xy 平面と平行な平面と直線 NQ の交点をそれぞれ R, T とします．



直線 TN と直線 TQ は共に球の接線で「球外の一点から，球に引いた接線の長さは等しい」から，

$$\mathrm{TN} = \mathrm{TQ}$$

NT / /RM だから，

$$\mathrm{RM} : \mathrm{MQ} = \mathrm{TN} : \mathrm{TQ} = 1:1 \qquad \therefore \mathrm{RM} = \mathrm{MQ} \qquad \cdots①$$

M は C' を底円とする直円錐の頂点だから，Q が C' 上を動いても MQ の長さは変わりません．よって，RM の長さは一定です．ところが「△RMN∽△PLN」だから，

$$\mathrm{RM} : \mathrm{PL} = \mathrm{MN} : \mathrm{NL} \qquad \cdots②$$

①，②より「Q が動いても PL の長さは変わらない」ので，C は L を中心とする円 です． (Q.E.D)

Cabri3D による検証（立体射影の「円-円対応」）

まず「Q を動かしても PL の長さは一定であること」を確認して見てください．次に，点 M を動かして円 C' を変え，それに応じて C が変わる様子をご覧ください． [circle to circle.html]