4. 半球モデルでの合同変換，円の作図

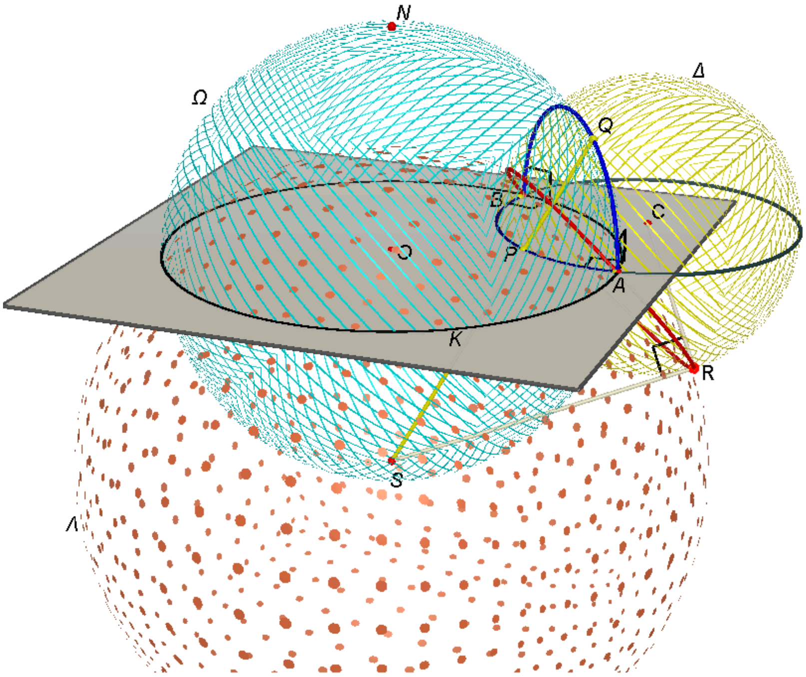
4-1. 直交する 2 組の球

K は単位円（ポアンカレ円盤），Ωは単位球，A,B は単位円周上の 2 点，P は弧 AB 上の点とします．さらに「南極 S を極とする立体射影」を f とし，P の f による像を Q とすると，半円 AQB は 半球面モデルの双曲的直線です． ここで, xy 平面上の点 C を中心とし 弧 AB を共有する球を Δ とすると，Δ と Ω は直交します．(図では $\angle OAC = \angle OBC = 90^{\circ}$）

さらに，中心が S で円 K を共有する球を Λ とすると，第 2 節より，f は「Λに関する鏡像変換」と一致します．すなわち，P と Q は 球Λに関して互いに鏡像です． ところが **点 P は球 Δ 上にあり，その鏡像 Q も Δ 上にあるので，球 Δ と球 Λ は直交します．**（下図で R を交円上の点とすると $\angle SRC = 90^{\circ}$）**故に，球 Δ の f による像は 球 Δ そのものです．**（P,Q だけでなく，Δ 上の点は全て Δ 上に移ります.）すなわち，

$$f(\Delta) = \Delta \quad \cdots①$$

結局，3 つの球 Ω, Λ, Δ のうち，Ω と Λ は直交しませんが，残りの Ω と Δ，Δ と Λ は直交します．



Cabri による検証

直線上の 2 点 A,B と点 P を drag してください． Perpendicular_spheres.html

4-2. 半球面モデル上の直線 に関する鏡像

4-1. と同様に，単位球をΩ，単位円（ポアンカレ円盤）を K，中心が南極 S で円 K を共有する球をΛ，「S を極とした立体射影」をfとすると，fはΛに関する鏡像変換と一致します．また，K に直交する円 D の中心を C，fによる D の像を E とすると，**E は半球面モデルの直線**です．さらに，C を中心とし円 D を共有する球をΔ，「球Δに関する鏡像変換」をgとし，ポアンカレ円盤内の点 P のgによる像を P' のように「'」をつけて表すと，**P と P'はポアンカレ円盤上の直線 D に関しても鏡像です．**…(#)

また，「$f(\mathrm{P})=\mathrm{Q}$，$f(\mathrm{P}')=\mathrm{Q}'$」とすると，

$$\mathrm{Q} \xrightarrow{f^{-1}} \mathrm{P} \xrightarrow{g} \mathrm{P}' \xrightarrow{f} \mathrm{Q}' \quad \cdots(*)$$

の様にして，Q を Q' に移すことができます．これが 「**半球面モデル上の直線 E に関する鏡像**」です．

ここで，定義より，

$$\mathrm{P} \xrightarrow{\Delta\text{に関する鏡像変換}} \mathrm{P}'$$

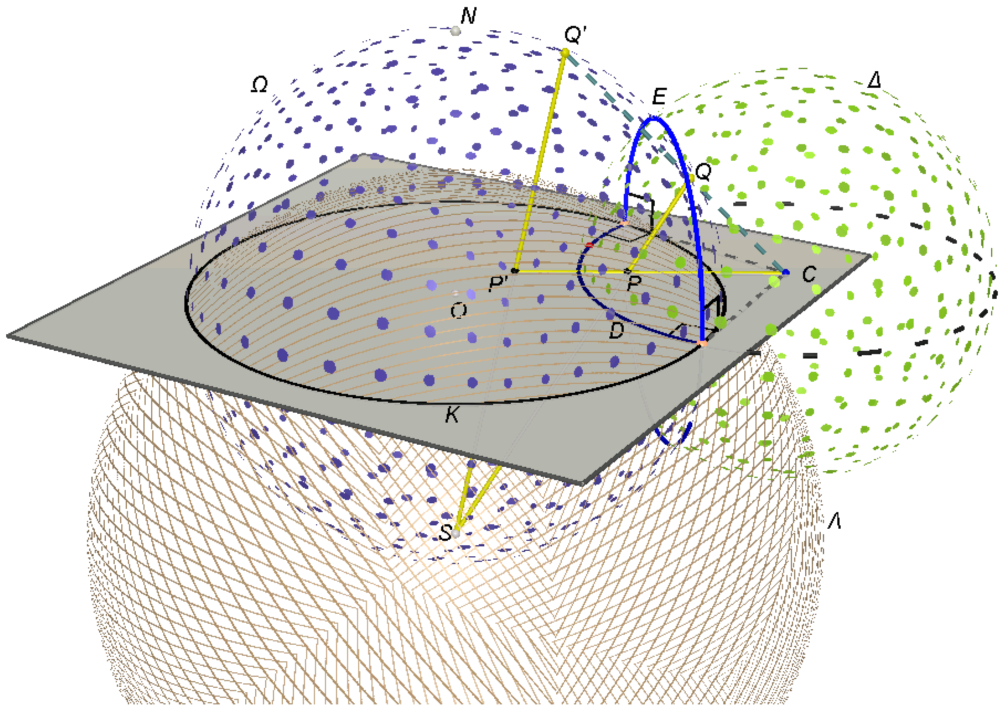
「**鏡像原理**」より「2 点が互いに鏡像の時，球Λに関する鏡像(=f)で移しても，互いに鏡像」なので，

$$f(\mathrm{P}) \xrightarrow{f(\Delta)\text{に関する鏡像変換}} f(\mathrm{P}')$$

ところが，**4-1.** より「$f(\Delta)=\Delta$」だから，

$$\mathrm{Q} \xrightarrow{\Delta\text{に関する鏡像変換}} \mathrm{Q}'$$

即ち「**Q と Q' は球Δに関しても鏡像**」になっています．ゆえに，「**双曲的直線 E に関する鏡像**」は，Ωとの交線が E と一致するような球Δを考えて，Δに関する鏡像をとれば楽に実現できます．

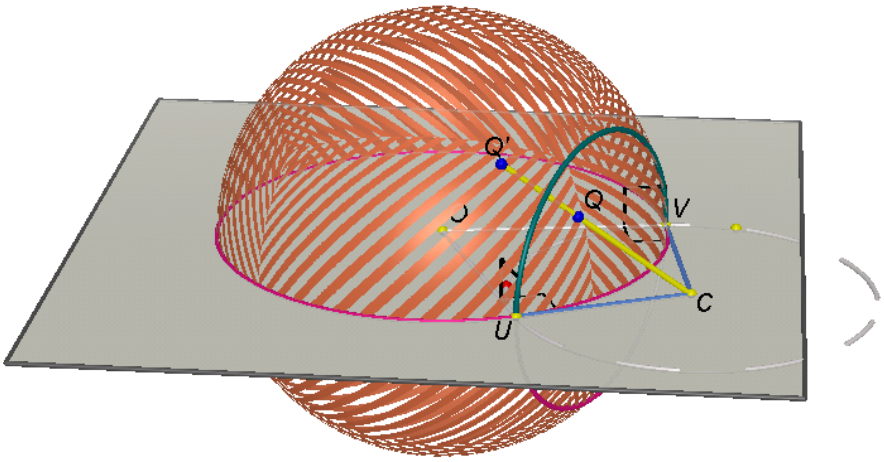


Cabri による検証

直線上の 2 点 A,B と点 P を drag してください．　　　mirror_on_sphere_model.html

4-2-1. 鏡像変換のさらに簡単な作図（極点からの射影）

ところが，半直線 CQ と単位球の交点として，Q は定まってしまうので，球に関する鏡像を使わなくとも作図できます．すなわち，半球面上の双曲的直線 E と，単位円 K の交点を U,V とするとき，U,V に於ける K の接線の交点を C とし，半直線 CQ と単位球の交点を Q'とすると，Q'は直線 UV に関する鏡像になります．



【注】C を直線 UV の**極点**と呼ぶことにすると，「**極点からの射影**」による作図と言えます．

Cabri による検証

点 Q,U,V,K を動かしてみてください．　　　　　mirror&projection.html

4-3. 半球面上における双曲的合同変換

ポアンカレ円盤や，上半平面と同様に，半球面上の双曲的合同変換は，双曲的直線に関する鏡像の合成で，実現できます．偶数回合成すると図形の向きを変えません．奇数回の合成は，図形の向きを変えます．以上のことをまとめると，次のようになります．

	上半球面	ポアンカレ円盤
双曲的直線	単位円と直交する半円	単位円と直交する一般化された円
双曲的円	半球面の内部の円	単位円の内部の円
等距離線	単位円と斜交する半円	単位円と斜交する一般化された円
極限円	単位円と接する円	単位円と接する円
無限遠直線	単位円	単位円
双曲的直線 E に関する鏡像	E の極点 C から引いた半直線 CP と単位球の交点	E に関する鏡像
双曲的合同変換	双曲的直線に関する鏡像の合成	双曲的直線に関する鏡像の合成

上半球面上での双曲的幾何は，ポアンカレ円盤や上半平面上の双曲的幾何と本質的に同じになります．すなわち幾何的な性質（交わるとか，平行とか，の関係）は，3 つのモデルで全く同じです．

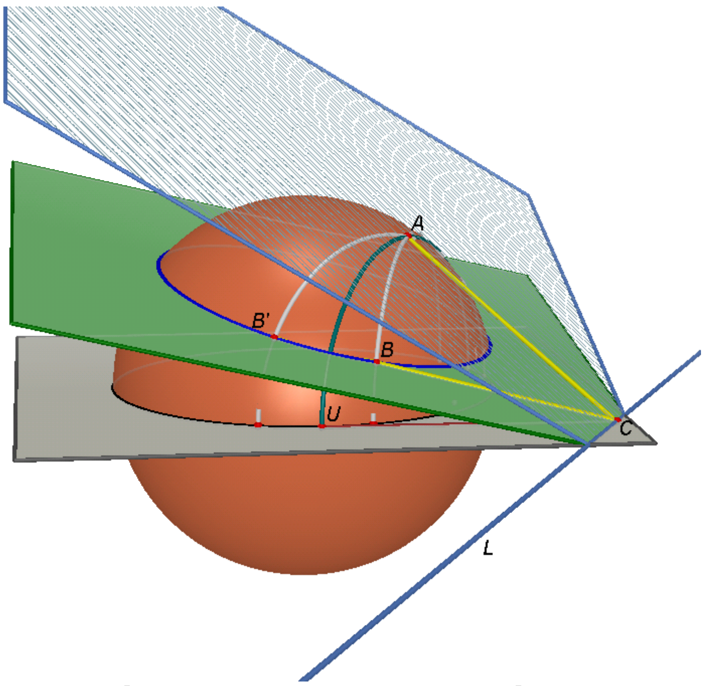
4-4. 双曲的円の作図（中心と一点から）

「極点からの射影」を利用して，「中心が A で点 B を通る双曲的円」の作図ができます．今，点 A に於ける単位球の接平面と *xy* 平面との交線を L とします. さらに L 上の任意の点 C から半直線 CB を引き，球との交点を B’とすると，B’は C を極点にもつ双曲的直線 UV に関し B と鏡像になります．一方，C は A に於ける接平面上にあるので，A の直線 UV に関する鏡像は A それ自身となります．よって双曲的線分 AB と AB’は，互いに直線 UV に関する鏡像で移るので，双曲的合同です．ゆえに[A,B]=[A,B’].（双曲的距離が等しい.）

したがって「中心が A で点 B を通る双曲的円」は

点 A に於ける接平面と *xy* 平面との交線を L とし，L と点 B を含む平面による球の切り口

と一致します.



[中心が A で点 B を通る双曲的円]

【注】双曲的円は「単位円 K と交点を持たない円」なので，単に双曲的円を作図するだけならば，球を平面で切れば OK です.

Cabri による検証

点 A,B,C を動かしてみてください.　　　　draw_circle.html