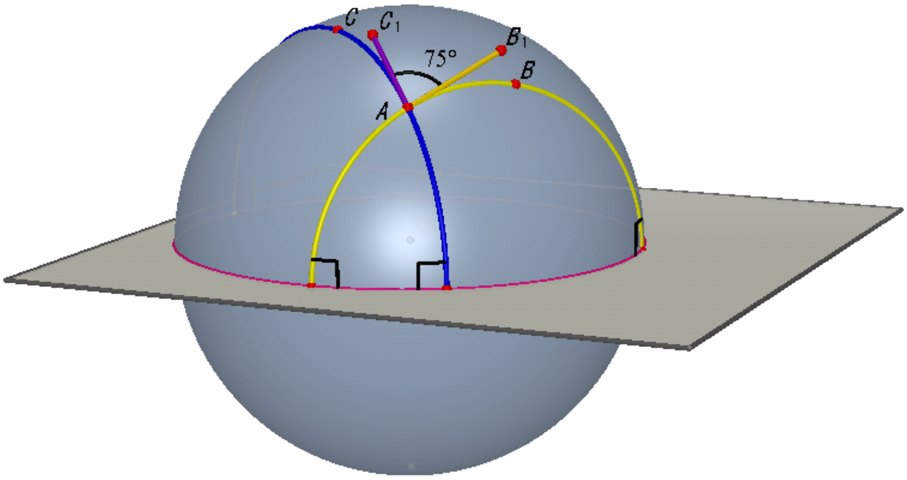
5. 双曲的角度と双曲的距離

5-1. 双曲的角度

ポアンカレ円盤上では，双曲的角度はユークリッド的角度と等しく，立体射影によって角度は保存されるので，半球面モデルでも，角度はユークリッド的角度と等しいです．すなわち，下図で直線 AB_1，AC_1 がそれぞれ半円 AB,AC の A に於ける(ユークリッド的)接線になっている時，双曲的直線 AB と AC のなす角は，ユークリッド的角度 $\angle B_1AC_1$ と等しい．



Cabri による検証

点 A,B,C を動かしてみてください．　　　angle.html

5-2. 双曲的距離

単位球Ωの南極をS, Sを中心とし単位円(ポアンカレ円盤)Kを含む球をΛ, Sを極とした立体射影をf, Kの内部の点をP, fによるPの像をQとすると,「SQ×SP=2」なので, fはΛに関する鏡像変換と一致します. また$\mathrm{P}(x,y,0)$とすると, Qの成分は次のようになります. (2-2)

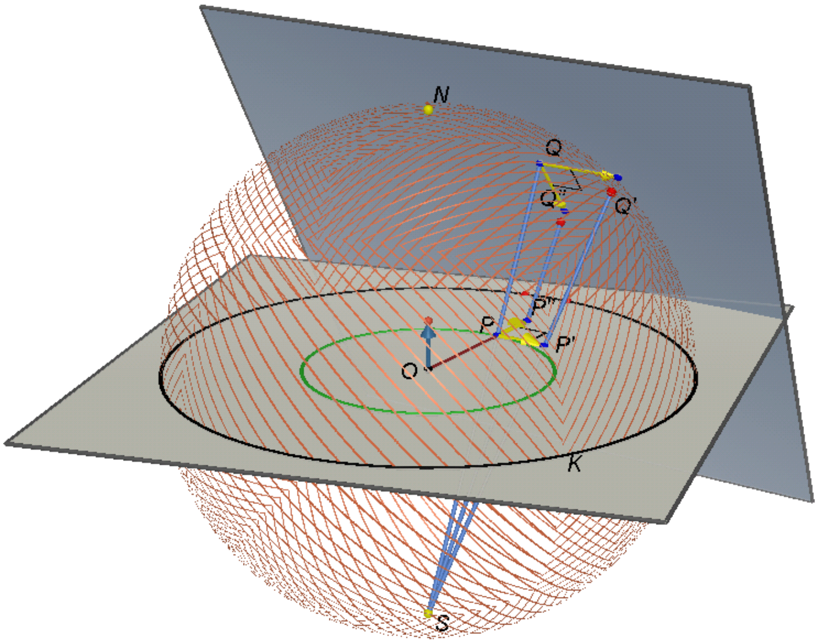
$$\boxed{\mathrm{Q}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2+1}\right)\cdots①}$$

[1] Pが円盤内で微小距離dp動いた時に Qの動く微小距離 dqを求めます. (ただしdp, dqは共にユークリッド的距離とします.)

「Pが動径OPと垂直な方向に動く時 (Pが図のP'へ動く時)」を考えると,「$dp \fallingdotseq |\mathrm{PP'}|$, $dq \fallingdotseq |\mathrm{QQ'}|$」です. Pが「少しだけ」動く時は, PはOを中心とした円周上を動き「PS=P'S」と考えてよいので, PもP'もSが中心で, 相似比の等しい相似変換でQやQ' に移されます. よって

$$dp : dq = \mathrm{SP}:\mathrm{SQ}, \qquad \therefore dq = \frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{SP}}dp = \frac{\mathrm{SQ}\times\mathrm{SP}}{\mathrm{SP}\times\mathrm{SP}}dp = \frac{2}{\mathrm{SP}^2}dp = \frac{2}{1+x^2+y^2}dp\cdots②$$

ここで,「鏡像変換の等方性」(1-3-6) より, ②の関係は Pがどの方向へ動く時も成り立ちます.



[2] 次に, 双曲的距離を考えます. ポアンカレ円盤上で「dp」に対する双曲的距離を「ds」と書くと,

$$ds = \frac{2}{1-(x^2+y^2)}dp\cdots③$$

よって ②,③より,

$$ds = \frac{2}{1-(x^2+y^2)}dp = \frac{2}{1-x^2-y^2}\cdot\frac{1+x^2+y^2}{2}dq = \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}dq = \frac{dq}{Z}$$

ただし, ③より, Zは点Qのz成分です. ゆえに, 半球面上での双曲的微小距離「ds」は,

$$\boxed{ds = \frac{dq}{Z} \quad (\text{但し } dq \text{ はユークリッド的微小距離, Z は Q の z 成分})}\cdots(*)$$

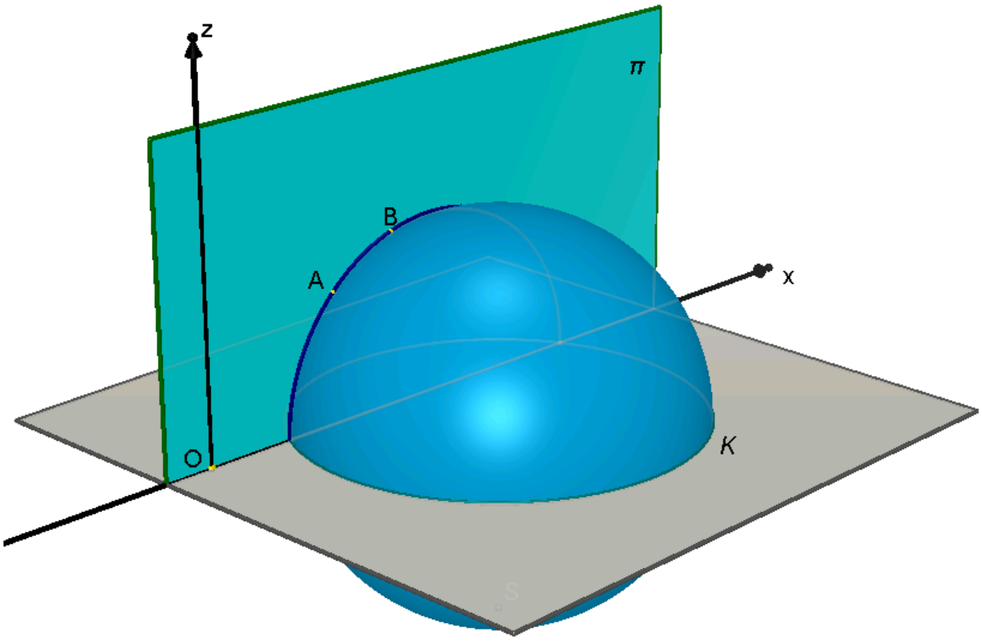
なお，以上のより詳しい計算は，ここをご覧ください． （Ctrl+Click）

5-2-1.「半球面モデル」と「ポアンカレ上半平面」の双曲的距離

$$\boxed{ds = \frac{dq}{Z} \quad \text{(但し } dq \text{ はユークリッド的微小距離，Z は Q の z 成分)}} \cdots(*)$$

上の距離の公式は，ポアンカレ上半平面に於ける 双曲的距離の定義「$ds = \dfrac{|dz|}{y}$」と全く一致します．

よって，半球面上の 2 点 A,B が与えられた時，A,B を含む xy 平面に垂直な平面 π を考え，それをポアンカレ上半平面とみなせば，2 点間の双曲的距離は求まります．



Cabri による検証

点 A,B,K を動かしてみてください． distance.html