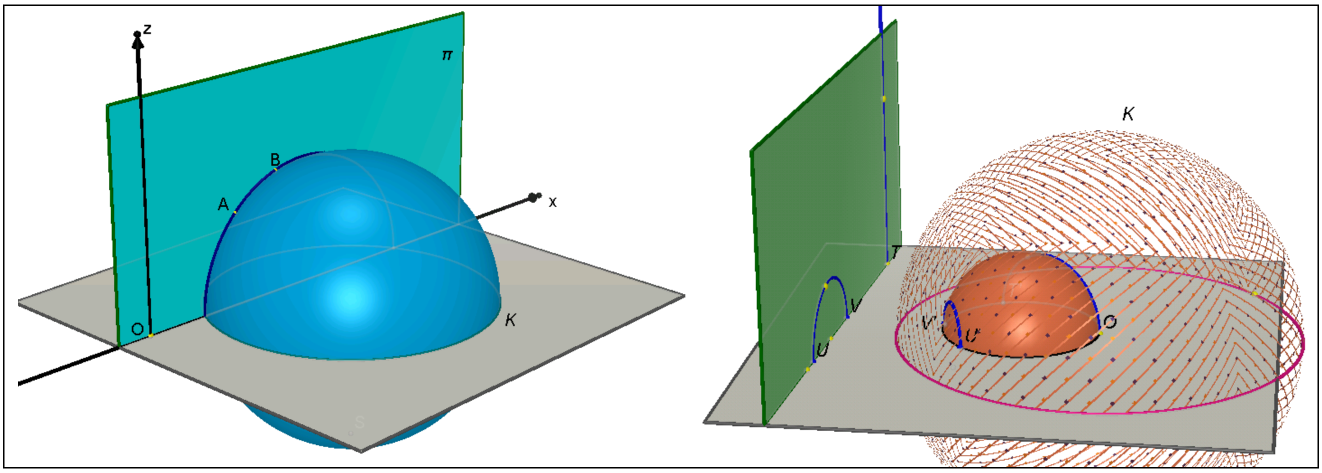
# 6． 双曲空間

## 6-1． 上半空間 H³

5-2-1.より「半球面上の線分 AB の双曲的長さ」が，「ポアンカレ上半平面 $\pi$ 上の線分 AB の双曲的長さ」と等しくなります．

このことは，上半球面や上半平面 $\pi$ は 「双曲空間内の双曲平面」と考え，半円 AB は「半球面とポアンカレ上半平面 $\pi$ の交線」と見ると自然です．すると「2 つの双曲平面の交線は，双曲的直線」です．




いま $xyz$ 空間（$z>0$）において，双曲的微小距離を

$$\boxed{ds=\frac{dl}{z}\quad (\,dl\text{ はユークリッド的微小距離}\,)}$$

そして，双曲的平面を

$xy$ 平面と直交する平面，または中心が $xy$ 平面上にある半球

また，双曲的直線などの基本図形は，各々の双曲平面における双曲的直線，円など とします．(右上図)

さらに双曲的合同変換の「原子」を，

$xy$ 平面と直交する平面，または中心が $xy$ 平面上にある半球に関する鏡像

と定めます．(この鏡像が双曲的距離を変えないことは，後で述べます．) このような双曲的空間を，**ポアンカレ上半空間（H³）**といいます．すると，

- 平面上の 2 点を結ぶ直線は，同じ平面に含まれる．
- 一直線上にない 3 点を通る平面は，ただ一つある．
- 2 つの異なる平面が　共有点を持つ時，共有点は直線になる．

などの　公理が　ユークリッド空間と同様に成り立ちます．

### Cabri による検証

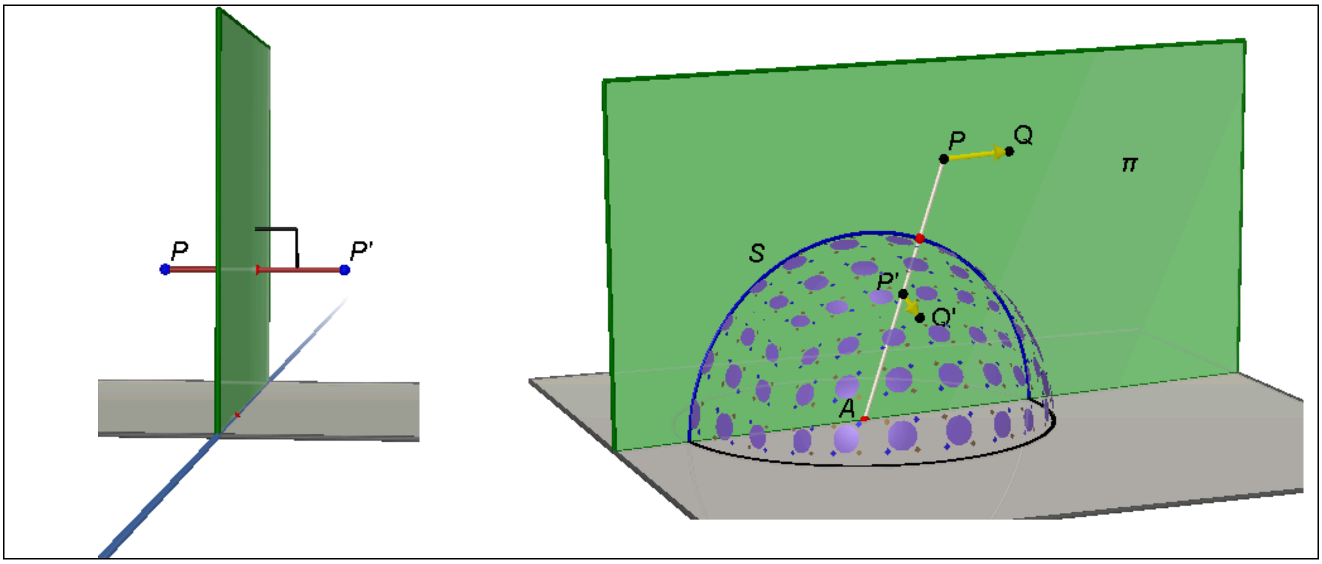
A,B,C を drag してください．3 点を通る平面が一つに決まります．　　[definition of H3.html]

### 6-1-1. 上半空間の鏡像変換

「$xy$ 平面と直交する平面 $\pi$，または中心が $xy$ 平面上にある半球 S に関する鏡像」すなわち「双曲的平面に関する鏡像」は，双曲的距離を変えません． これらは $H^3$ での双曲的合同変換になっています．

まず「$\pi$ に関する対称移動」(左下図) は，明らかに双曲的距離を変えません．

次に「球に関する鏡像」(右下図) では，P,Q の球 S (中心は A) に関する鏡像を P',Q'とし，P と Q が「非常に近い」とします． Q が「A,P を通り $xy$ 平面と直交する平面 $\pi$」の上にあるときは，上半平面 $H^+$ と同様に [P,Q]=[P',Q']です．さらに Q が平面 $\pi$ 上にない時も「鏡像変換の等方性」(1-3-6) を使うと，やはり [P,Q]=[P',Q']です．




ユークリッド空間では「**平面に関する対称移動**」と「**平行移動**」と「**回転移動**」が合同変換の「**分子**」で，「向きを変えない合同変換」はこのいずれかになります．ところが「平行移動」と「回転移動」は，「平面に関する対称移動」の合成で表せるので，**平面に関する対称移動は合同変換の「原子」に当たります．** これと同様に，**「双曲的平面に関する鏡像」は $H^3$ での双曲的合同変換の「原子」に当たります．**

### Cabri による検証

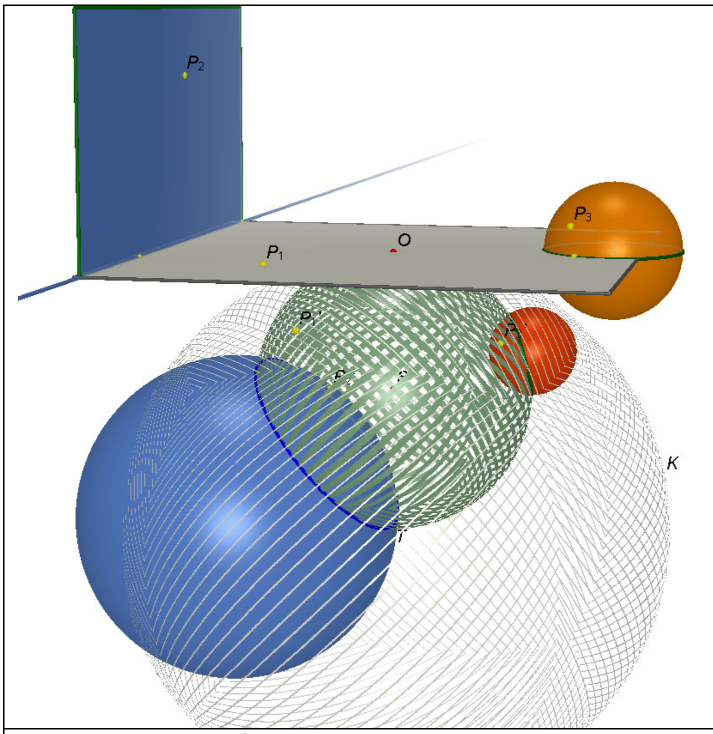
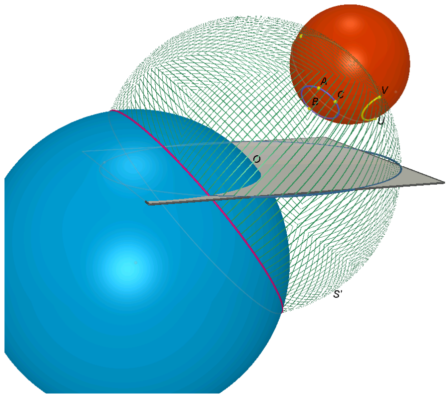
U,V,S,T,A,B,P,Q,O,C,S を drag してください． 球 S に関する鏡像による A,B,P,Q の像が A',B',P',Q'となります． [transformation of H3.html]

## 6-2．単位球モデル

K を中心が $(0,0,-2)$ ,半径が 2 の球とします．上半空間 $H^3$ を K に関して鏡像変換すると， $xy$ 平面は中心が $(0,0,-1)$ ，半径が 1 の球面 S（下図の薄緑色の球）に移り，「**等角性**」と「**球－球対応**」から，上半空間内の双曲的平面は，S と直交する球または平面に移る(下図で S に交わっている青と赤の球)．さらにこの図全体を $z$ 軸正方向に 1 平行移動すると，中心が原点で半径が 1 の球 S' の内部に，上半空間が移されます．この双曲空間を「**単位球モデル**（$B^3$）」といいます． $B^3$ での双曲的微小距離は，

$$\boxed{ds = \frac{2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

また，上半空間と同様，双曲的角度は，ユークリッド的角度と等しい．そして，O を通る平面による切り口(半径 1 の円盤)と，単位球 S' に直交する球面が　双曲的平面になります．

| | |
|---|---|
|  |  |
| $H^3$ を球 K に関して鏡像変換すると　$xy$ 平面は緑色の球に，$xy$ 平面と垂直な平面は青色の球に，赤の半球は赤の球に移ります． | これらの球を $z$ 軸方向に 1 平行移動すると，緑色の球 S は 原点を中心とする単位球 S' に移ります．この球の内部が $B^3$ です． |

### 6-2-1．CabriⅡによる検証

青い球の表面の単位球内の部分が双曲平面になります．(ソフトの都合で，不要な部分を切り取ることが出来ません．）黄色の弧は双曲的直線 UV で，単位球と直交しています．(平面 OUV による切り口になっています.）赤色の円は単位球内にある時は**双曲的円**で，単位球と接する場合は**極限円**，2 点で交わる場合は**等距離線**です．P,Q を動かして双曲平面を，U,V を動かして直線を，A,B,C を動かして円を動かしてみてください．

[B3_definition.html](B3_definition.html)