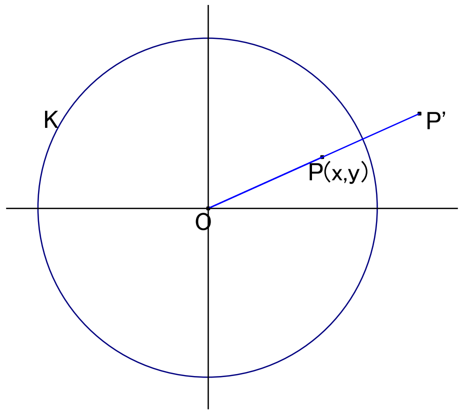
鏡像変換

ユークリッド平面または複素数平面で考えます．　また円 K は O が中心で半径が R の円とします．
このとき，

定義　点 P の 円 K に 関する鏡像が P'　⇔　P' が 半直線 OP 上 にあり，$\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OP'}}=\mathrm{R}^2$



鏡像変換の式

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OP'}\times\mathrm{OP}}{\mathrm{OP}\times\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{R^2}{x^2+y^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

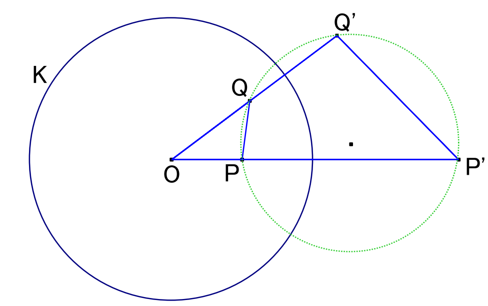
よって，O 中心，半径 r の球 K に関する点 P の鏡像は，

$$\boxed{\mathrm{P'}\left(\frac{R^2x}{x^2+y^2},\frac{R^2y}{x^2+y^2}\right)}$$

A. 最も基本的な性質

A1. (鏡像と相似) 点 P, Q の円 K に関する鏡像が P' , Q' のとき， △OPQ ∽ △OQ'P'

A1'. 点 P, Q の円 K に関する鏡像が P' , Q' のとき， 4 点 P,Q,P',Q' は同一円上にある.



証明

定義より,

$$OP \times OP' = OQ \times OQ' = R^2 \cdots ①$$

よって,

$$OP : OP' = OQ : OQ'$$

ゆえに,

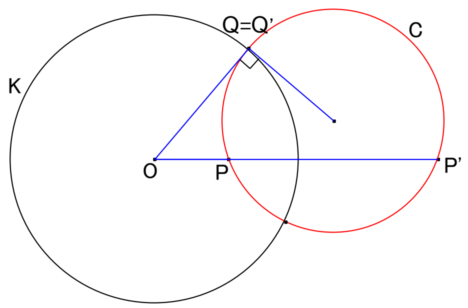
$$\triangle OPQ \backsim \triangle OQ'P' \cdots ②$$

また①より，方べきの定理から，4 点 P,Q,P',Q' は同一円上にあります.

Cabri II による検証

Drag P,Q,K,O　　　A1.html

A2.(直交する 2 円)　P と P' が 円 K に関し鏡像のとき, P と P' を通る円 C と K は直交します. 逆に円 C と円 K が直交しているとき, 円 C 上の点 P と O を結ぶ半直線と C の P 以外の交点を P' とすると， P と P'　は K に関し鏡像となります.



証明

K と C の交点を Q とすると, K に関する鏡像によって Q は動きません. よって鏡像の定義より

$$OP \times OP' = OQ^2 = R^2$$

「方べきの定理」より, 直線 OQ は円 C の接線となる. ゆえに,

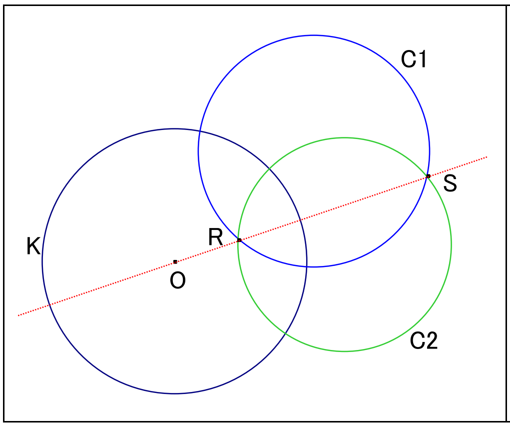
$$円 C \perp 円 K.$$

逆も 「方べきの定理」より成りたちます.

Cabri II による検証

Drag P, K,O　　　A2.html

A3.(直交する 2 組の円の交点)　Kに2円C_1,C_2が直交している時，C_1とC_2が2点で交わるならば，その2点はKに関し互いに鏡像となる.



証明　A2 より,C_1上の点はC_1上の点へ，C_2上の点はC_2上の点へ移ります．よって，C_1とC_2の交点をR,Sとすると，R はC_1とC_2の交点に移ります．ゆえに R の K に関する鏡像は S となります.

【注】これから，

Kに2円C_1,C_2が直交しているとき，C_1とC_2の2交点を結んだ直線はKの中心を通ることも言えます.

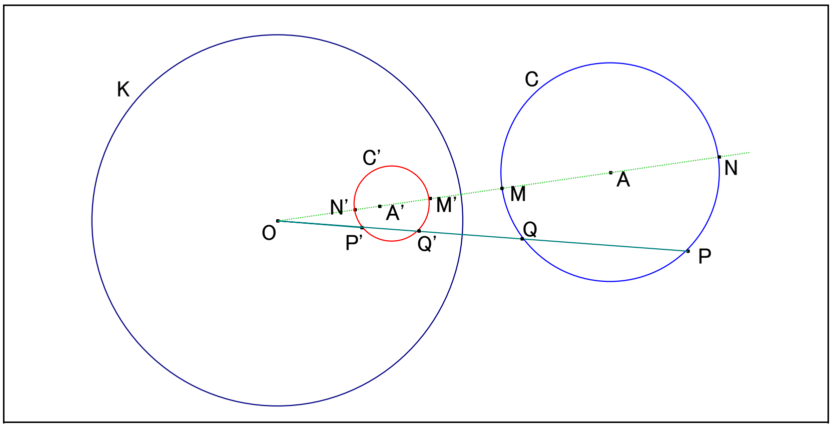
CabriⅡによる検証

Drag P, Q, K,O　　　A3.html

B. 円や直線の像

B1.(円の像 - 1)

円 C が 円 K の中心 O を通らないとき，円 C の像は，O を通らない円 になる.



証明 円 C の中心を A. 直線 OA と円 C の交点を M, N, さらに円 C 上に適当な点 P をとり，半直線 OP と円 C の交点のうち P 以外の点を Q とします. M, N, P, Q の K に関する鏡像を M', N', P', Q', K の半径を R とすると

$$\begin{cases} OP\times OP'=R^2 \\ OQ\times OQ'=R^2 \\ OM\times OM'=R^2 \\ ON\times ON'=R^2 \end{cases} \quad \cdots①$$

P,M,N,Q は同一円上にあるので「方べきの定理」より

$$OP\times OQ=OM\times ON \quad \cdots②$$

①, ②より

$$OP'\times OQ'=OM'\times ON'$$

ゆえに「方べきの定理」より P',Q',M',N' は同一円周上にあります. この円を C' とすると，対称性から C' は線分 M'N' を直径とする円で，P, Q によりません. ゆえに C の像は円 C' となります.

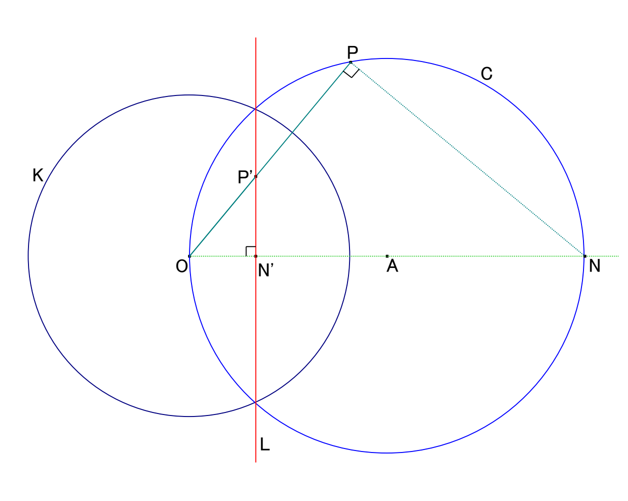
【注】「C が O を通らない」と言う条件は，直線 ON,OP を引くために使用しました.

Cabri II による検証

Drag A,C,P, K　　B1.html

B2.(円の像 - 2)

円 C が円 K の中心 O を通るとき，円 C の像は，O を通らない直線になる．



証明　円 C の中心を A, P を C 上の点, ON を O を通る直径, P,N の円 K による鏡像を P' , N' とすると,

$\angle OPN = \angle R$

A1 より「△OPN∽△ON'P'」だから,

$\angle ON'P' = \angle OPN = \angle R$

ゆえに, P' は N' を通り直線 ON と直交する直線 l を描きます. $N' \neq O$ だから, l は原点を通りません.

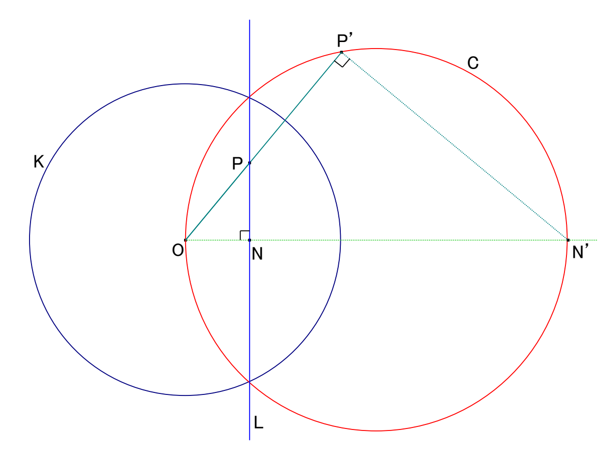
Cabri II による検証

Drag A,P, K　　B2.html

B３.(直線の像)

l を直線とする. l が K の中心を通らないとき, l の像は O を通る円となる.（B2 の逆)

l が K の中心を通るとき, l の像は O を通る直線となる.



証明　l が O を通らない時, P を l 上の１点, O から l へおろした垂線の足を N, さらに N と P の K に関する鏡像を N' , P' とします.

A1 より「△OPN∽△ON'P'」だから,

$\angle OP'N' = \angle ONP = \angle R$

故に P' は ON' が直径の円上を動きます.

また, l が O を通るときは明らかです.

Cabri II による検証

Drag　P,N,K　　B3.html

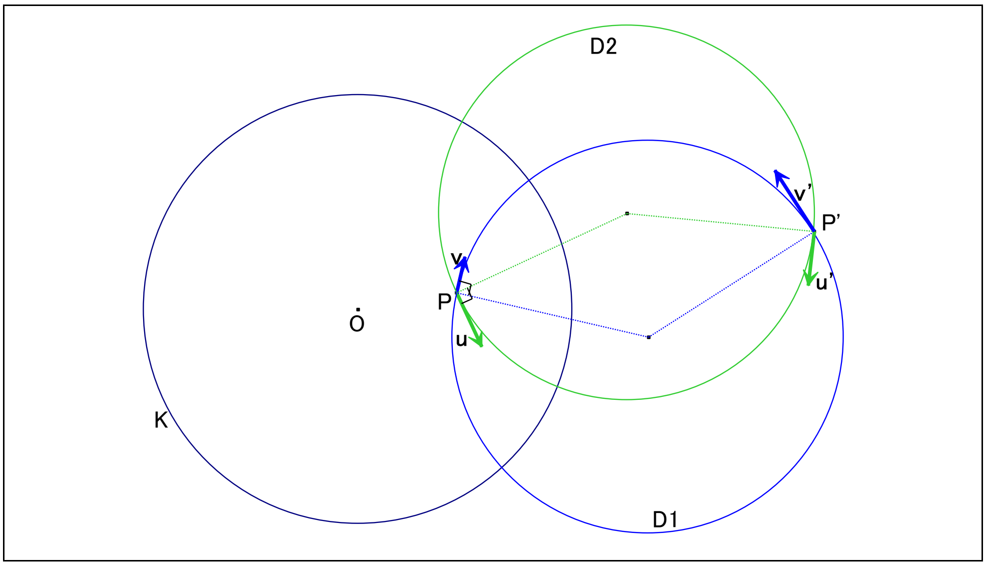
【注】l が O を通らないとき, P が l 上を無限遠点に向けて動くと P'は O に限りなく近づくが O とは一致しません. ところが無限遠点も l の一部と考えると, l の像は円全体となります. 普通はこのように **無限遠点も入れて直線** と考えます. またこのような**直線**と円を一緒にして「一般化された円」とし 太字の **円** で表すと,「円の鏡像は円となる」と言えます. なお A1, A2 も **円** に関して成り立ちます.

C. 曲線に関する定理$\vec{v}'$

点 P で交わる滑らかな 2 曲線 のなす角は，P における 2 曲線の接線のなす角と定めます．

【注】これ以後の定理も，「一般化された円」に対して成り立ちます．

C1. (等角性)　点 P で 2 曲線C_1とC_2が交わるとし，P，C_1, C_2の円 K に関する鏡像をP', C_1', C_2'とすると，点 P におけるC_1とC_2のなす角は，P'においてC_1'とC_2'がなす角と等しい．

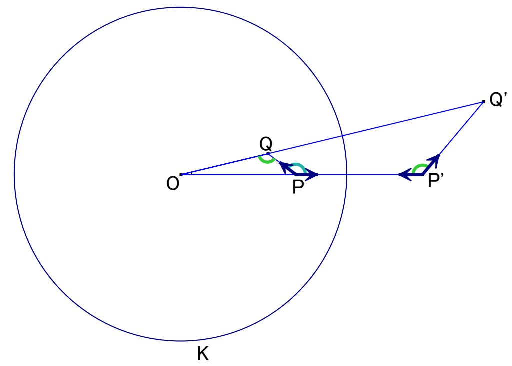


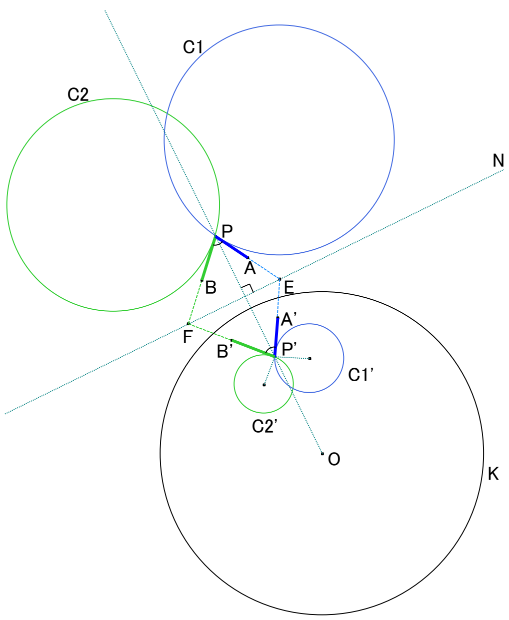
証明　P におけるC_1, C_2の接線の方向ベクトルを$\vec{u}, \vec{v}$，P'におけるC_1', C_2'の接線の方向ベクトルを$\vec{u}', \vec{v}'$，また K に関する鏡像変換をfとします．（C_1, C_2は図に描いていません.）　いま「P，P' を通り P に於いて$\vec{u}$と接する円」をD_1とすると　「接している曲線と直線はfで移しても接する」から，$f(\vec{u}) = \vec{u}'$と$f(D_1)$も点P'で接します．ところが A2 より「D_1の鏡像はD_1自身」なので，$\vec{u}'$とD_1が点P'で接します．同様にして「P，P' を通り P に於いて$\vec{v}$と接する円」をD_2とすると，$\vec{v}'$とD_2が点P'で接します．　ところが，点 P と点P'において 2 円のなす角は等しいので，「$\vec{u}$ と$\vec{v}$ のなす角」と「$\vec{u}'$と$\vec{v}'$ のなす角」は等しくなります．　　Q.E.D.

Cabri II による検証

Drag　K,O,P,Q,R　　　C1.html

【別証明】





Q は C_1 上の点で，P と Q は非常に近いとします．

P, Q の K による鏡像を P' , Q' とすると， A1 より，

$$\angle OQP = \angle OP'Q' \cdots ①$$

また，

$$\angle QPP' = \angle OQP + \angle POQ \cdots ②$$

P→Q の時，直線 PQ は C_1 の P における接線，直線

P'Q' は P' における C_1' の接線に一致します．

またこのとき「$\angle POQ \to 0$」だから，①,②より

$$\angle QPP' = \angle Q'P'P$$

故に，C_1 と直線 OP のなす角は，C_1' と直線 OP のなす角と等しくなります．

2 曲線 C_1 と C_2 のなす角の場合も，直線 OP で分けて考えると，角が保存されます．　すなわち左図で，
「$\angle APP' = \angle A'P'P$ かつ $\angle BPP' = \angle B'P'P$」から，

$$\angle APB = \angle A'P'B'$$

が言えます．

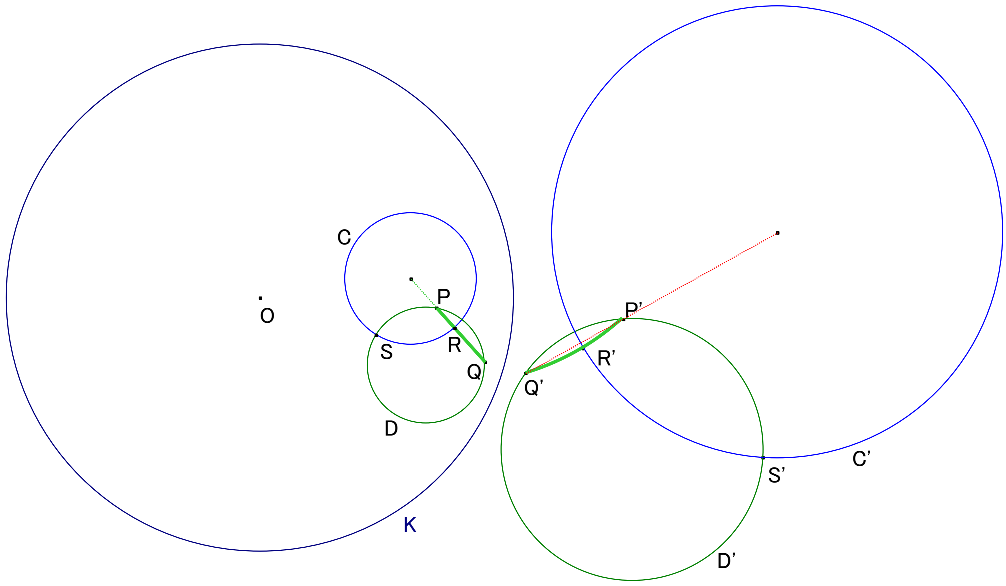
また，対応する 2 接線 PA と P'A' の交点 E と，PB と P'B' の交点 F は， P と P' の垂直 2 等分線 N 上にあります．　即ち「P における 2 つの接線」と「P' における 2 つの接線」は N に関し線対称となります．

Cabri II による検証

Drag　P, C_1, C_2 , O, L, M, K　　　C1'.html

C2.（鏡像原理）　円 K に関する鏡像を f とし，f による像を「'」をつけて表すとすると，「円 C に関し点 P と点 Q が鏡像」のとき，「円C' に関し点P' と点Q' は鏡像」となる.

証明　（円は「一般化された円」です．しかしKが直線の場合は明らかなので，Kは「普通の円」として証明します.）



C が「普通の円」のとき，P,Q を通る適当な円 D を 1 つ作ると，A2 より，

$$C \perp D \cdots ①$$

また P と Q は C に関し鏡像なので，

$$\text{直線 } PQ \perp C \cdots ②$$

B1,B3 より，C,D,直線 PQ の像は　円　となり，かつ　等角性(C1)より，

$$\text{円 } D' \perp \text{円 } C' \text{　かつ　円 } P'Q' \perp \text{円 } C' \cdots ③$$

よって A3 より「円 D' と円 P'Q' の交点は C' に関し互いに鏡像」となります．すなわち，P' と Q' は円 C' に関し鏡像です.

C が O を通っている円の時は その鏡像C' が直線となりますが，この場合も同様に証明できます．また C が「直線」のときも同様に証明できます．（略）

Cabri II による検証

C が O を通らないとき	Drag　P, C, M, K, O	C2-1.html
C が O を通るときとき	Drag　P, M, K, O	C2-2.html