デザルグ(Desargues)の定理

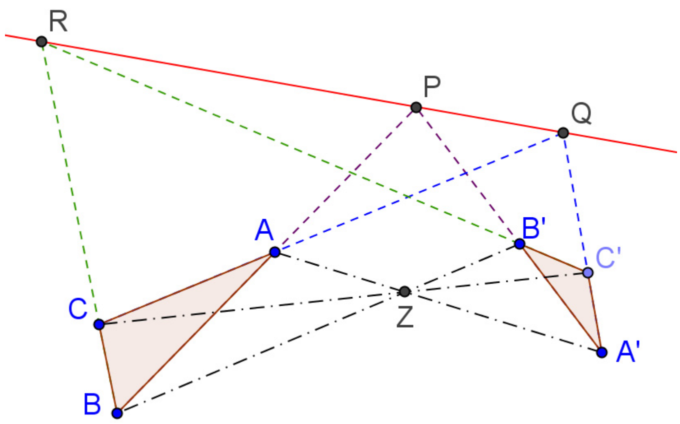
記述を簡単にするため，「直線 l と直線 m の交点を $l \cdot m$」と表します．

△ABC と△A'B'C'について，次のように定義します．

点 Z に関して配景的(perspective)	直線 L に関して配景的(perspective)
直線 AA',BB'CC'が 1 点 Z で交わること	直線 AB と A'B'の交点, BC と B'C'の交点, CA と C'A'の交点が直線 L 上にあること

1. デザルグの定理

△ABC と△A'B'C'がある点に関して背景的ならば，ある直線に関して背景的である．
また，ある直線に関して背景的ならば，ある点に関しても背景的である．



theorem.ggb

【注】この定理は空間内の三角形に対しても成り立ちます．

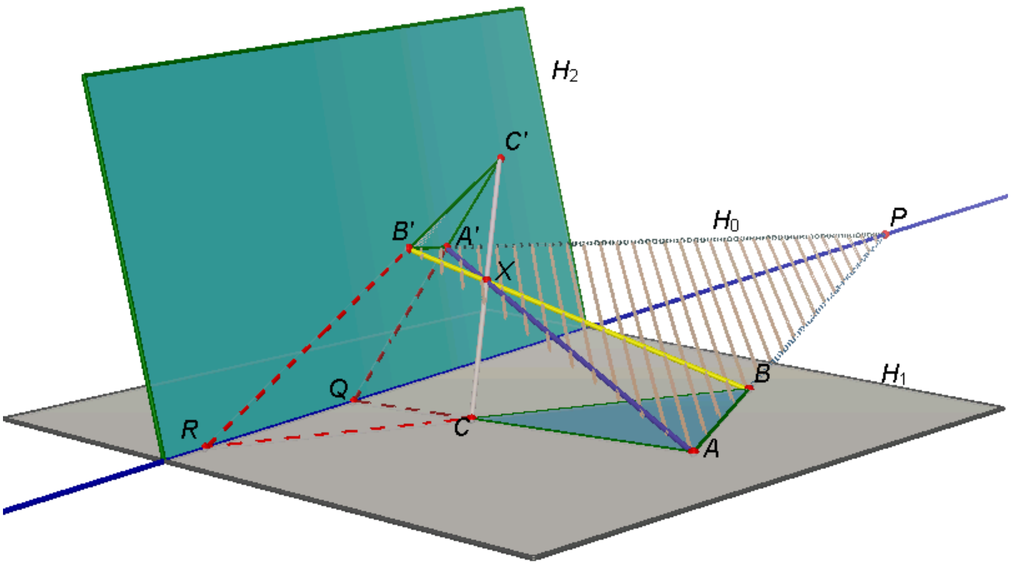
【前半部分の証明】

前半：△ABC と△A'B'C'が点 X に関して背景的ならば，ある直線に関して背景的.

を，G.Jennings「幾何再入門」に従って証明します.（前半の双対が後半なので，射影幾何の双対原理より，前半が証明されると後半も証明されます.） パスカルの定理の証明は「円を射影する」だけですが，この証明(Case2）は「持ち上げて 射影」します.

【Case1】△ABC と△A'B'C'が同一平面上にない時.

△ABC と△A'B'C'は X に関し背景的なので, 2 直線 AB と A'B'は平面 H_0 上にあります. よって直線 AB は平面 H_1 と H_0 の交線です. 同様, 直線 A'B'は平面 H_2 と H_0 の交線です. 故に，P=AB·A'B' は，H_0 と H_1 の交線 L 上にあります. 同様 Q=AC·A'C', R=BC·B'C' も L 上にあります.

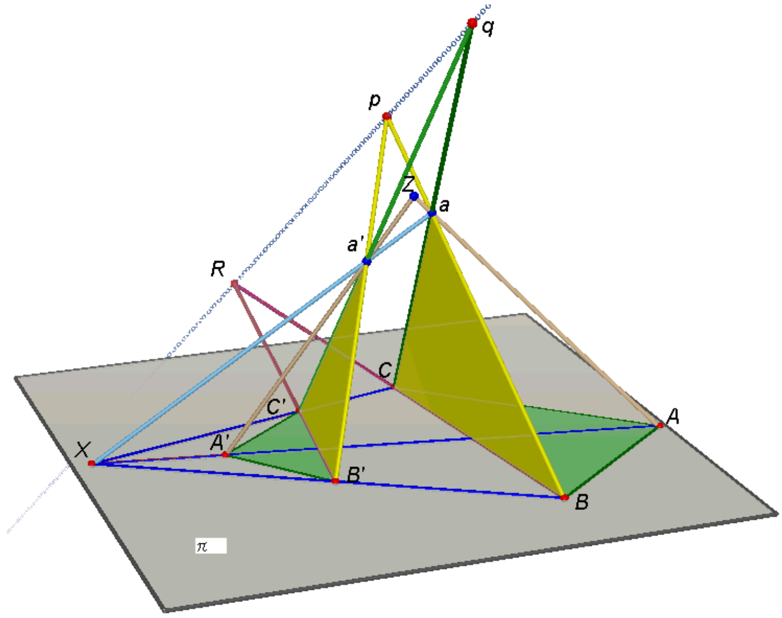


proof1.html

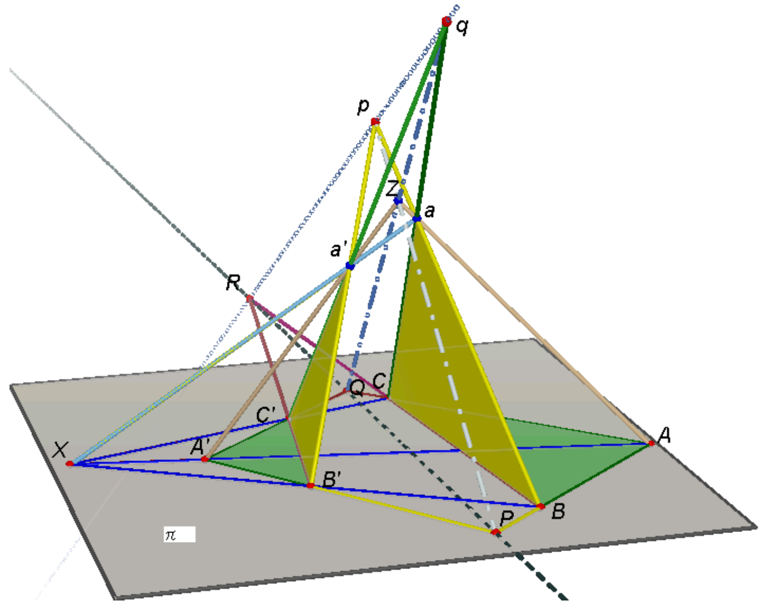
【Case2】△ABC と△A’B’C’が同一平面上にある時.

辺 BC≠辺 B’C’と仮定しても良い. 平面外に 1 点 Z をとり, a を直線 AZ 上の点とする.
△ABC と△A’B’C’は X に関し背景的なので, 5 点 X,A,A’,Z,a は同一平面上にあり,
$a'=ZA'\cdot Xa$ が存在する. そして △aBC と △a’B’C’ は, X に関して背景的になる.
かつこの 2 つの三角形は同一平面上にない.

故に, $p = Ba\cdot B'a'$, , $R = BC\cdot B'C'$ は同一直線上にある. (∵【Case1】)



次に Z を中心として, △aBC と△a’B’C’の辺とその延長を平面 π 上に射影すると,
「$a \to A,\ a' \to A'$」だから,「$p = Ba\cdot B'a' \to P = BA\cdot B'A'$, $q = Ca\cdot C'a' \to Q = CA\cdot C'A'$」
射影により「直線は直線に移る」ので, P,Q,R も同一直線上にある.【前半証明終】



proof2.html