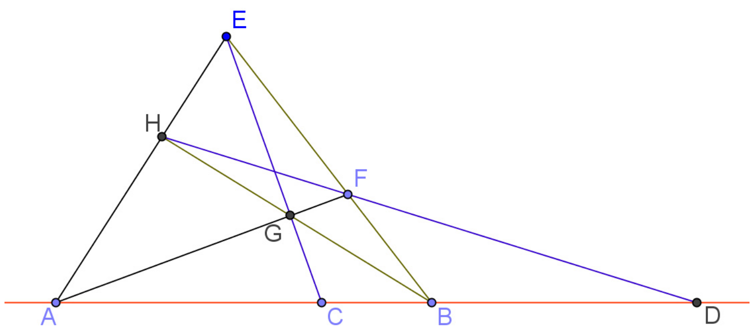
調和共役（harmonic conjugate）

1．定義

１直線上の４点 A,B,C,D が，ある四角形 EFGH に対し図のような関係にある時，即ち四角形の２組の対辺の交点を A,B，対角線と直線 AB との交点が C と D のとき，
「4 点 A,B,C,D は調和点列」，「2 点 A,B に対する，点 C の調和共役点は D」或いは「2 点 A,B に対し，点 C と D は互いに調和共役」などと言い H(AB,CD) と表します．



このとき，「メネラウスの定理」と「チェバの定理」より，

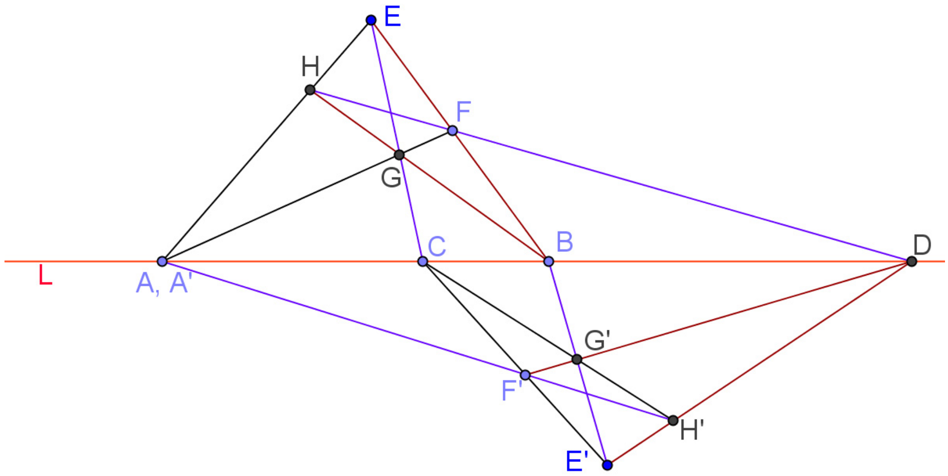
$$\frac{\overline{EH}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}}=1 \quad \text{かつ} \quad \frac{\overline{EH}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}}=1$$

よって，

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \iff \frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{\overline{AD}\cdot\overline{CB}}=1 \iff [A,B|C,D]=1 \ \cdots(*)$$

従って **E や F などの取り方によらずに，3 点が決まると 残りの 1 点は確定します．**

定義より　H(AB,CD) なら「H(BA,CD)　かつ　H(AB,DC)　かつ　H(BA,DC)」ですが，更に H(CD,AB) も成り立ちます．



definition.ggb

上図で，四角形 EFGH に対しては，A,B が対辺の交点，C と D は対角線上にあります．よって，　H(AB,CD)　です．ここで L の下側に，点 E'をとり，直線 CE'上に F'を，次に直線 BE'→直線 DF'→交点 G'→点 H'の順に，四角形 E'F'G'H'を作ります．そして直線 H'F'と L の交点を A'と定めると，H(CD,A'B) です．故に前頁より $[C,D|A',B]=1$　です．

ところが，複比の性質により，

$$[A,B|C,D]=1 \Longleftrightarrow \frac{\overline{AC}\cdot\overline{DB}}{\overline{AD}\cdot\overline{CB}}=1 \Longleftrightarrow \frac{\overline{CA}\cdot\overline{BD}}{\overline{CB}\cdot\overline{AD}}=1 \Longleftrightarrow [C,D|A,B]=1$$

ですから，

$$[C,D|A',B]=[C,D|A,B].$$

したがって，A=A'　です．

【注】本当は　複比も長さだけでなく，方向を考えないと　厳密な証明にはなりません．厳密な証明は，コクセター「幾何学入門」あるいは　Coxeter「Projective geometry」をご覧ください．

２．射影変換との関係

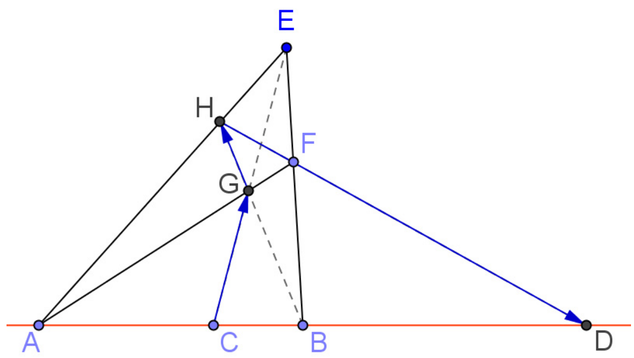
H(AB,CD) のとき，A,B を動かさず，C を D に動かす射影変換が存在します．下図で順に 点 E,B,G からの射影を考えると，

$$\mathrm{ACB} \overset{=}{\wedge} \mathrm{AGF} \overset{=}{\wedge} \mathrm{AHE} \overset{=}{\wedge} \mathrm{ADB}$$

すなわち，3 つの背景写像の合成で「$\mathrm{ACB} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{ADB}$（A,C,B はそれぞれ A,D,B に移る）」となります．そして「**射影変換の基本定理（一直線上の射影変換は 3 点の像で決まる）**」により， $\mathrm{ACB} \,\overline{\wedge}\, \mathrm{ADB}$ となる変換は唯一つです．故に

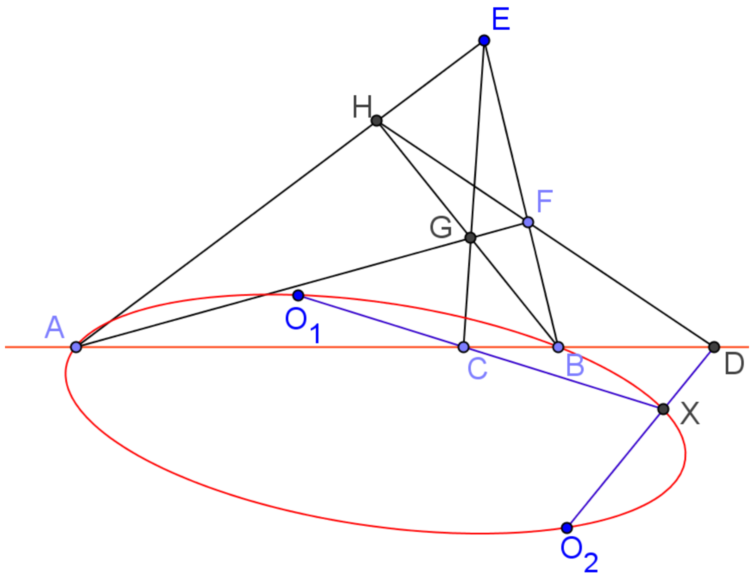
「２点 A,B を動かさない射影変換 f による A,B 以外の点を X とすると，A,B に関し，X と f(X) は調和共役」

になります．また H(AB,CD) なら H(AB,DC) なので，「$f(\mathrm{D}) = \mathrm{C}$」も成り立ちます．



projection with 2 invarient point.ggb

さらに,A,B を固定, 2 定点 O_1,O_2 をとり, 直線 O_1C と O_2D の交点を X とすると, f(C)=D だから, 直線 O_1C と O_2Q の間に射影変換が存在します. ゆえに C が動いたとき「X の軌跡は 2 次曲線」となります.（ Steiner の定理の逆 ）



conic.ggb