Steiner の定理

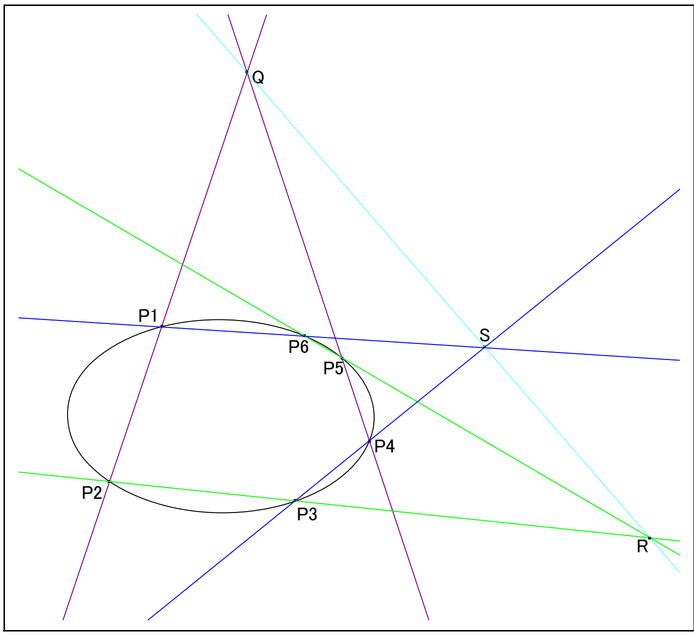
ここで　2 次曲線といっているのは，高校の数学における 2 次曲線で，楕円，双曲線，放物線です. また, 記述を簡単にするため,「直線 l と直線 m の交点を $l{\cdot}m$」と表します.

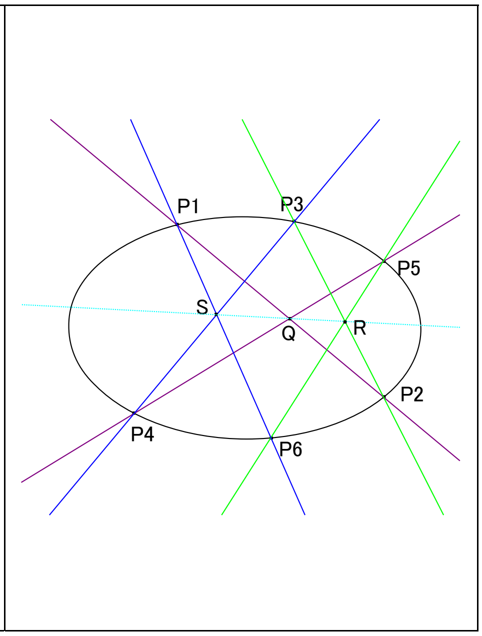
0.パスカルの定理

二次曲線 K 上に任意の 6 点 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ をとり，直線 P_1P_2 と直線 P_4P_5 の交点を Q，直線 P_2P_3 と直線 P_5P_6 の交点を R，直線 P_3P_4 と直線 P_6P_1 の交点を S とすると，Q,R,S は同一直線上にある．即ち，二次曲線に内接する 6 角形の「対辺の交点」は，同一直線上にある.
逆に，曲線 C に内接する任意の 6 角形の「対辺の交点」が同一直線上にあるなら，C は 2 次曲線である.

【注】正 6 角形のとき, P,Q,R は全て無限遠点となり, 直線 PQR は無限遠直線となります. この場合も「P,Q,R は同一直線上にある」と約束します．すなわち「無限遠点を集めた直線（無限遠直線）」も直線と考えます.

証明 は，例えば，G.ジェンングス著「幾何再入門」をご覧ください．下図はその 1 例です．いずれの場合も Q,R,S は同一直線上にあります.





pascal.ggb

以下の説明は，郡 敏昭著「射影平面の幾何学」を参考にしました．ただこの本は非常に厳密に書かれているので，ここでは大幅に簡略化しています．

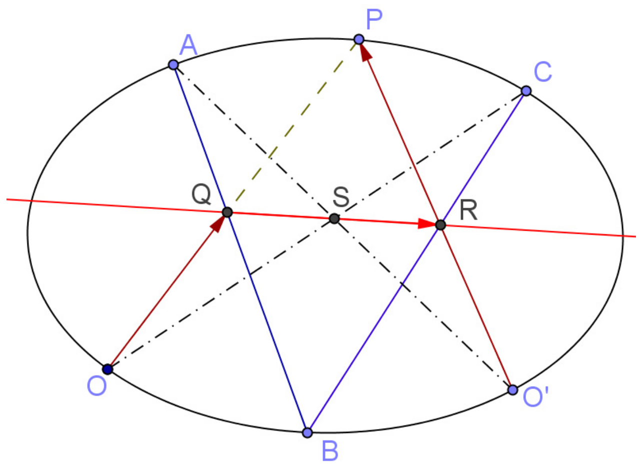
1．Steiner の定理

> 2 次曲線 K 上に任意の 2 定点 O,O’を取り，P を K 上の動点とする．このとき，直線 OP を直線 O’P に移す射影変換 π が存在する．

【証明】K 上に定点 A,B,C をとります．この時 S=OC·O'A も定点です．Q=BA·OP と R=BC·O'P は動点ですが，Pascal の定理より，Q,R,S は一直線上にあります．直線 BA,BC は定直線なので，AB による切断と点 S, O’からの射影を考えて，

$$\mathrm{OP} \barwedge \mathrm{Q} \doublebarwedge \mathrm{R} \barwedge \mathrm{O'P}$$

この対応を π とすれば，π は射影変換で，$\pi(\mathrm{OP})=\mathrm{O'P}$ 【証明終】



[Steiner.ggb]

2. Steiner の定理の逆

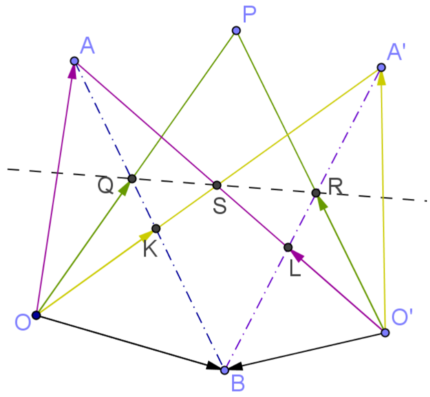
O,O'を曲線 K 上の定点，P を K 上の任意の点とする．直線 OP を直線 O'P に移す射影変換πが存在すれば，K は 2 次曲線となる．

【証明】定点を通る直線群を pencil と呼んで，点 X を通る pencil を P(X)と書きます．

[Part1] K 上に定点 A,B,A'を取ります．仮定より，

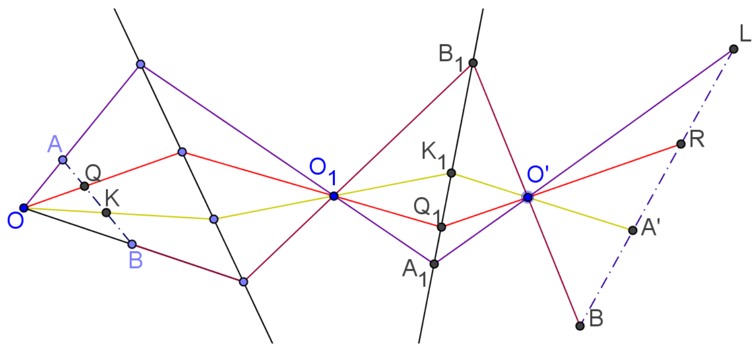
π(OP)=O'P, π(OA)=O'A, π(OB)=O'B, π(OA')=O'A'

直線 BA による OA,OP,OA',OB の切断と，
直線 BC による O'A,O'P,O'A',O'B の切断を考え，
Q=AB·OP, K=AB·OA', R=BA'·O'P, L=BA'·O'A
とします．



steiner converse1.ggb

P(O)と P(O')の間に射影対応πがある時，これらの pencil を 2 直線で 切断してできる点列と点列の間にも 射影対応が出来ます．例えば P(O)と P(O')の間に 下図のような対応があるとします．(OA $\overline{\wedge}$ O_1A_1 $\overline{\wedge}$ $O'A_1$)．
この時，これらの pencil を切断して出来る直線 AB 上の 4 点 A,Q,K,B と，直線 BL 上の 4 点 L,R,A',B は射影的に対応しています．（AQKB $\barwedge$ LRA'B）．

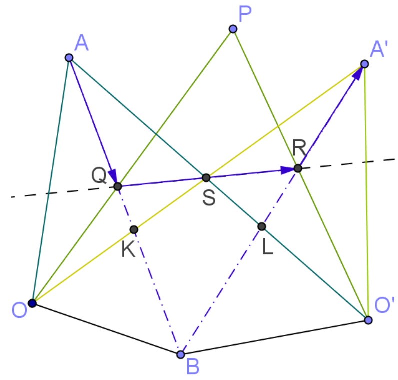


この射影は直線 BA と BL の交点 B を動かさないので，ある配景写像σで置き換えられます．即ち，直線 AB 上の点列は直線 BL 上の点列に　ある中心から「一発で」射影されます．そして，σの中心は S＝OC·O'A です．ゆえに，Q,S,R は一直線上に並びます．
即ち，K 上の 6 点が O と O'を含むときは Pascal の定理と同様の性質が成り立ちます．

[Part2] 以上は O,O’,A,A’,B が定点で，P が動点でした．次に O,O’,A,A’,P が定点，B を動点とします．**この時も，Q,S,R は B の位置によらず一直線に並びます．**
故に S を中心とする直線 OP から O’P への射影により P(A)と P(A’)の間に対応が出来ます．すなわち，

$$AQ \barwedge Q \doublebarwedge R \barwedge A'R$$

この射影を ω とすると，曲線 K 上の任意の点 B に対し直線 AB を直線 A’B に移す射影変換 ω が存在します．



steiner converse2.ggb

ゆえに「A,A’と ω の関係」と「O,O’と π の関係」は全く同じです．したがって **O と O’ は特別な点ではなく，K 上の任意の 2 点 A, A’ に置き換えることが出来ます．**

この A,A'に関して，[Part1] と同様の議論をすると，K 上の任意の 6 点に対し, Q,S,R は一直線となり, Pascal の定理が成り立ちます．　【証明終】