

# 内積

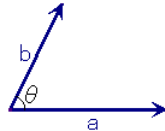
## 0.内積の定義

### 0-1 定義

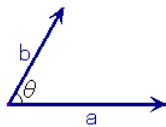
$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積を  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ( $a \text{ dot } b$  と読む) とかき、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

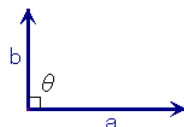
と定義します。ただし、 $\theta$  は、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の始点をそろえたときに二つのベクトルのなす角で、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の範囲で測るものとします。



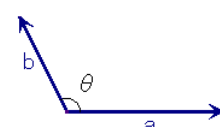
内積はベクトルでなく、実数であることに注意しましょう。定義より内積の符号は次のようになります。



$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  のとき  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$



$\theta = 90^\circ$  のとき  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  のとき  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

### 0-2 内積の性質 (その1)

ここでは、定義からすぐ導けるものを2つ挙げます。 $\vec{a}$  と  $\vec{a}$  のなす角は  $0^\circ$  だから、定義より

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \quad \xrightarrow{\vec{a}} \vec{a}$$

また「 $\cos 90^\circ = 1$ 」だから、

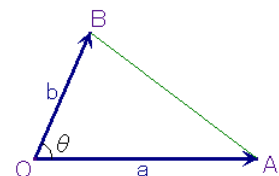
$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ のとき,} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

[ここで一言] 「 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 」と定義した理由は、

内積を使って余弦定理 (三平方の定理も含む) の書き直しをやるため

です。即ち、右の $\triangle ABC$ で、余弦定理より、

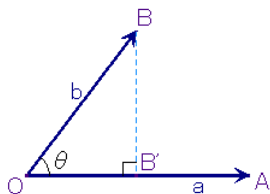
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta$$



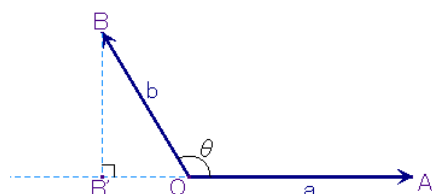
上式の右辺の「 $OA \cdot OB \cos \theta$ 」を  $\overline{OA \cdot OB}$  と定義しました。

## 1. 内積と正射影（内積の図形的意味）

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  のはさむ角を  $\theta$ ,  $\vec{b}$  の終点 B から直線 OA に下ろした垂線の足を  $B'$  とすると,  
 「 $\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \cdot OB \cos \theta$ 」だから,

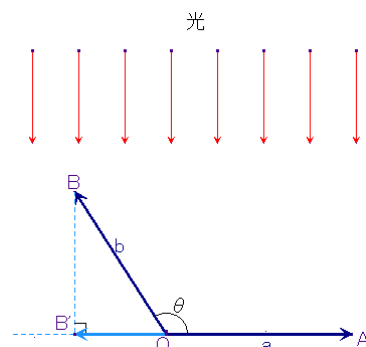
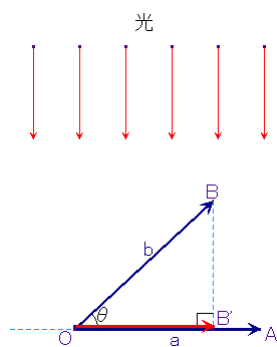


$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  のとき  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \cdot OB \cdot \cos \theta = OA \cdot \overrightarrow{OB'}$



$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  のとき  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \cdot OB \cdot \cos \theta = OA \cdot (-\overrightarrow{OB'}) = -OA \cdot \overrightarrow{OB'}$

このとき,  $\overrightarrow{OB'}$  を,  $\overrightarrow{OB}$  の「直線 OA の上への正射影ベクトル」と言います.  $\overrightarrow{OA}$  に対し垂直に光が当たったとき, 「直線 OA をスクリーンと考えたとき出来る  $\overrightarrow{OB}$  の影」と言う感じです. (下図) なお,  $\overrightarrow{OB'}$  が  $\overrightarrow{OA}$  と同じ方向を向いているとき「赤色」, 反対方向を向いているとき「水色」で表しています.

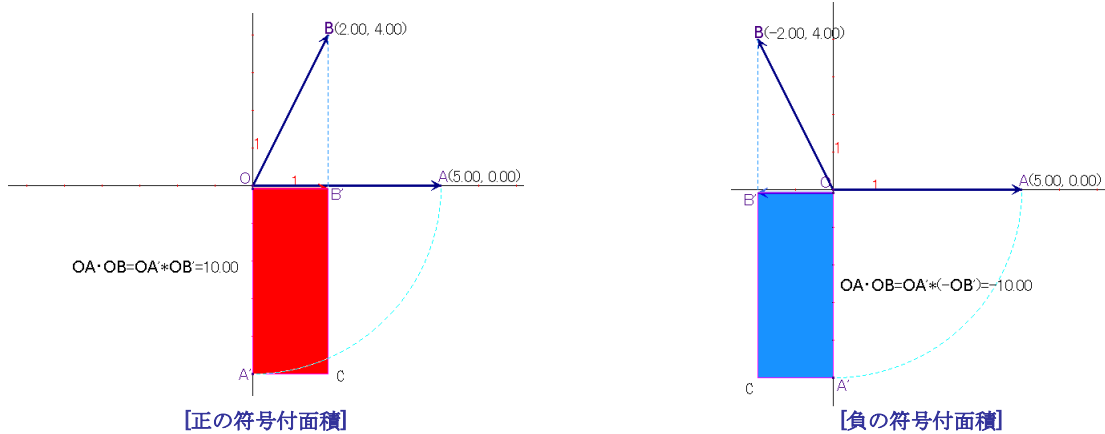


この「スクリーン」と「影」と言う表現を使うと, 内積は

「(スクリーンの長さ) × (影の長さ)」

と言えます. ただし正射影ベクトル  $\overrightarrow{OB'}$  が  $\overrightarrow{OA}$  と同じ方向を向いているときは 「(影の長さ) =  $\overrightarrow{OB'}$ 」,  $\overrightarrow{OB'}$  が  $\overrightarrow{OA}$  と反対方向を向いているときは, 「(影の長さ) =  $-\overrightarrow{OB'}$ 」です. また「(スクリーンの長さ) =  $\overrightarrow{OA}$ 」です.

さらに「符号付面積」として見ることも出来ます。下図で  $A'$  は  $A$  を  $O$  の周りに  $(-90^\circ)$  回転した点とします。すると、内積は「四角形  $OA'CB'$  の符号付面積」です。ただし正射影ベクトル  $\overrightarrow{OB'}$  が  $\overrightarrow{OA}$  と同じ方向を向いているときは「四角形  $OA'CB'$  の符号付面積  $= \overrightarrow{OA'} \times \overrightarrow{OB'}$ 」,  $\overrightarrow{OB'}$  が  $\overrightarrow{OA}$  と反対方向を向いているときは、「四角形  $OA'CB'$  の符号付面積  $= -\overrightarrow{OA'} \times \overrightarrow{OB'}$ 」と定めます。図では正の符号付面積は「赤」で負の符号付面積は「水色」で表しています。



### 1-1. Cabri II による検証

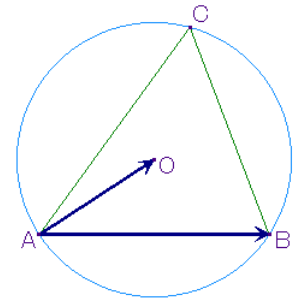
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  の値を Cabri II で見てみます。「目で見る」には「符号付面積」の方が都合が良いので、内積を「符号付面積」として表しています。(赤色の長方形は正の「符号付」、水色の長方形は負の「符号付」). 点  $A$  と  $B$  を Drag して下さい。

[inner\\_product&projection.html](http://inner_product&projection.html)

## 1.2. 正射影の考え方の有効な例題

### 【例 1】(外接円)

三角形 ABC の外心を O とする。  $AB=3$  のとき、  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$  を求めよ。



AB=3のとき、  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} =$

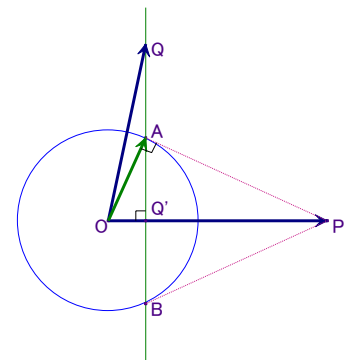
[解答]直線 AB をスクリーンと考えることにより、

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \times \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$$

### 【例 2】(直線の式)

円 C の半径は 3, 点 P は C の外部にある点で、P から C に引いた 2 本の接線の接点を A, B とする。

Q が直線 AB 上にあるとき、  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$  の値を求めよ。



[注]この問題は、小林先生に教えていただきました。ありがとうございます。

**[解答]**

(Step1) Q から直線 OP におろした垂線の足を Q' とする. 直線 OP を「スクリーン」と見ると,

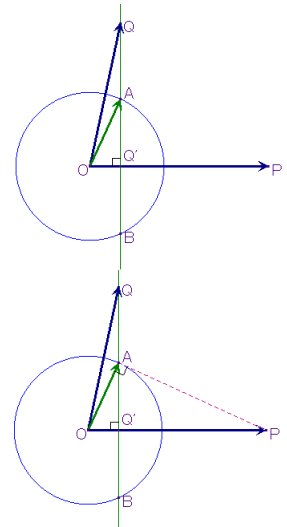
$$\begin{cases} \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = OP \times OQ', \\ \overline{OP} \cdot \overline{OA} = OP \times OQ' \end{cases}$$
$$\therefore \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \overline{OP} \cdot \overline{OA} \dots \textcircled{1}$$

(Step2) 次に, 直線 OA を「スクリーン」と見ると,

$$\overline{OP} \cdot \overline{OA} = OA \times OA = 3^2 = 9 \dots \textcircled{2}$$

①,②より,

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 9$$



このような例題だけでなく, 直線の方程式は実は内積そのものです. 「点と直線の距離の公式」も内積を使うと, 簡単に証明できます. (後述)