4. 余弦定理との関係

4.1. 内積の計算法則

1°	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (交換法則)
2°	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配法則)
3°	$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

分配法則は，第 2 節と第 3 節で詳しく説明しました．他の法則は，定義（次の$\boxed{1}$）からも明らかです．また成分（次の$\boxed{3}$）を使ってもすぐ示せます．なお，1°～3° を組み合わせると，

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\{\vec{b}+(-\vec{c})\}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot(-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+(-\vec{a}\cdot\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}\\(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{cases}$$

なども言えます．

4.2. 内積の定義，定理のまとめ

内積の定義・定理をまとめると次のようになります．（第 1 節～第 3 節）．ここでは上の「1°,3°」は，「当たり前」として省きました．

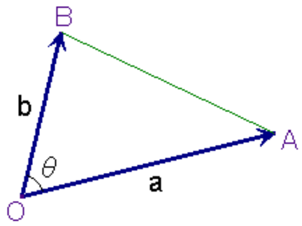
$\boxed{1}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vert\vec{a}\vert\vert\vec{b}\vert\cos\theta$ (内積の定義)
($\boxed{1}$の系)	$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vert\vec{a}\vert^2$， $\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\boxed{1'}$	「内積」=「スクリーンの長さ」×「正射影の長さ」 (内積の図形的定義)
$\boxed{2}$	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (分配法則)
$\boxed{3}$	$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$ のとき， $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ (定理)

ここでは，$\boxed{1}$から**直接**$\boxed{2}$を導き，さらに$\boxed{2}$から$\boxed{3}$を導きました．教科書では，普通，余弦定理を用いて$\boxed{1}$から$\boxed{3}$を導き，さらに$\boxed{3}$から$\boxed{2}$を導いています．どちらでも良いですが，CG にするには前者の方がよいと思ったので，このやり方にしました．

4.3. 余弦定理を導く

「 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 」と「$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 」を使って，余弦定理を導いて見ます.

∠AOB=θ の三角形 OAB があります．このとき，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，



$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 &= \left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 && \leftarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) && \leftarrow |\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a} \\
&= \vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a} && \leftarrow \text{分配法則} \\
&= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b} && \leftarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \\
&= \mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta
\end{aligned}
$$

以上，**簡単に「余弦定理」が導けました!** もはや，余弦定理を忘れても大丈夫です?! このように

内積の基本的な使い方は「長さや角度を求めるときに，余弦定理の代わりに使う

ことです．なお，この変形に見るように，

ベクトルの長さは２乗し，内積に直し，内積の分配法則を使う

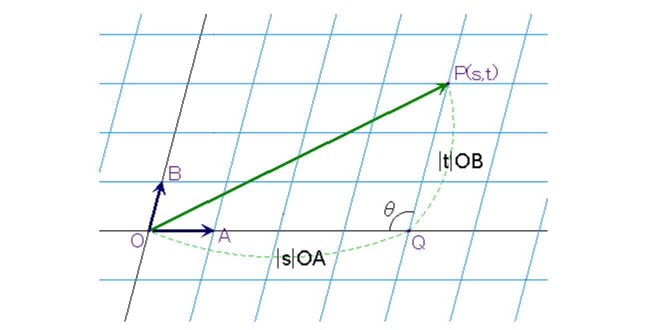
ことが多いです.

【注】「$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$」と言う**珍答案**をよく見ますが，これは上図で「(AB の長さ)=(OA の長さ)−(OB の長さ)」を表していて，O, B, A がこの順に一直線上にある時以外は成り立ちません.

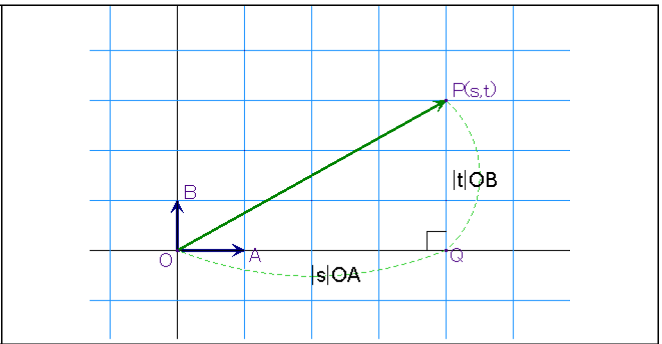
一般に

$\vec{p}=s\,\vec{a}+t\,\vec{b}$ (s,t は実数) と表されているとき， $\left|\vec{p}\right|^2=\left|s\,\vec{a}+t\,\vec{b}\right|^2=(s\,\vec{a}+t\,\vec{b})\cdot(s\,\vec{a}+t\,\vec{b})=s^2\left|\vec{a}\right|^2+2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2$ (余弦定理) 特に $\vec{a}\perp\vec{b}$ のとき， $\left|\vec{p}\right|^2=s^2\left|\vec{a}\right|^2+2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2=s^2\left|\vec{a}\right|^2+t^2\left|\vec{b}\right|^2$ (三平方の定理)

(s,t) が直交座標なら「P(s,t) と原点との距離は$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=s^2+t^2$」ですが，一般の斜交座標のときは，やや複雑になる事を表しています．また，下の△OQP に余弦定理を使い，上式を直接示すのも簡単です.



一般のとき



OA ⊥ OB のとき

4-4 長さと角度を求める問題

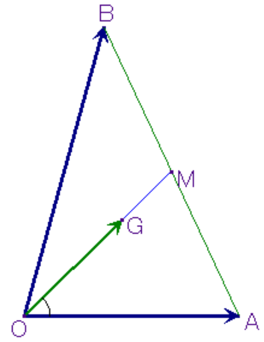
△OABとその重心Gがあり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=3, \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=5,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ とする．
(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|$の値を求めよ．
(2)　$\cos\angle\mathrm{AOG}$の値を求めよ．

[解 1]．内積の利用

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく．さらに線分 AB の中点を M とする．「$\mathrm{OG}:\mathrm{GM}=2:1$」だから，

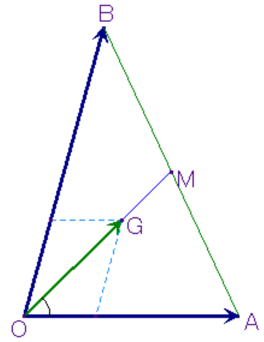
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\cdots①$$

(右図参照)



(1)

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|^2 &=\left|\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2\\ &=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) &&\leftarrow|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\\ &=\frac{1}{9}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}\right) &&\leftarrow \text{分配法則}\\ &=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right) &&\leftarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\\ &=\frac{1}{9}(3^2+2\times3+5^2)\\ &=\frac{40}{9}\end{aligned}$$



よって，

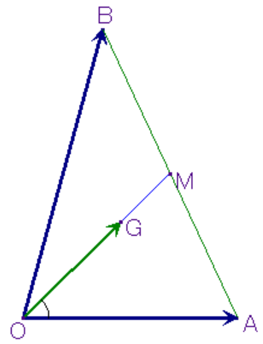
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|=\sqrt{\frac{40}{9}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}\quad\cdots(Ans)$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{a}\cdot\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{1}{3}(3^2+3)=4$$

よって，

$$\cos\angle\mathrm{AOG}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|}=\frac{4}{3\times\frac{2\sqrt{10}}{3}}=\frac{\sqrt{10}}{5}\quad\cdots(Ans)$$



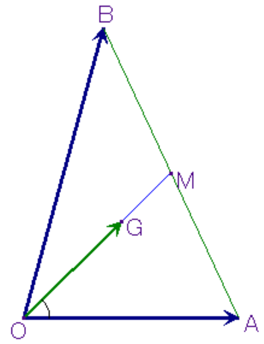
【注】最終行で 「$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$」より，「$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$」を使いました．

「内積＝余弦定理」ですから，平面では余弦定理を使っても内積を使う殆どの問題は解けます．ただし色々な補助線を引かないと計算が大変になります. 特に 平行補助線 は(相似を使えるので) 有効です.

【別解】 余弦定理の利用（平行補助線の利用）

A を通り, OB に平行な直線と B を通り OA に平行な直線の交点を C とします.

「$|\overrightarrow{OA}|=3, |\overrightarrow{OB}|=5,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$」だから,



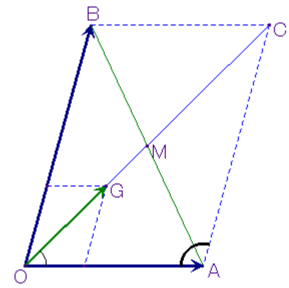
$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{3}{3\cdot 5}=\frac{1}{5}$$

OB//AC だから,

$$\cos\angle OAC=\cos(180^\circ-\angle AOB)=-\cos\angle AOB=-\frac{1}{5}$$

よって余弦定理を△AOC に使うと,

$$AC^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos\angle OAC=9+25+6=40$$



ゆえに,

$$OC=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

「$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$」だから,

$$|\overrightarrow{OG}|=\frac{1}{3}\overline{OC}=\frac{2\sqrt{10}}{3}\quad\cdots(Ans)$$

(2) 余弦定理を△AOC に使うと,

$$\cos\angle AOC=\frac{OA^2+OC^2-AC^2}{2\cdot OA\cdot OM}=\frac{3^2+(\sqrt{40})^2-5^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{10}}=\frac{24}{6\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore\cos\angle AOG=\cos\angle AOC=\frac{\sqrt{10}}{5}\qquad\cdots(Ans)$$

【注】平行補助線を引かないで解くことも出来ますが大変です. 3 回も (!) 余弦定理を使う羽目になります.

△AOB に余弦定理を使って,

$$AB=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos\angle AOB=2\sqrt{7}.$$

△AOB に余弦定理を使って,

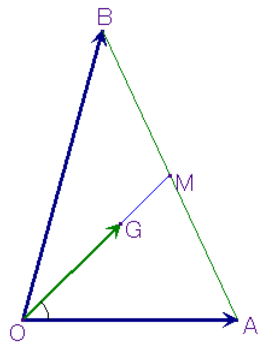
$$\cos\angle OAB=\frac{AO^2+AB^2-OB^2}{2\cdot AO\cdot AB}=\frac{1}{\sqrt{7}}$$

最後に 余弦定理を△AOM に使うと,

$$OM^2=AO^2+AM^2-2\cdot AO\cdot AM\cdot\cos\angle OAB=10\qquad\therefore OM=\sqrt{10}$$

ゆえに,

$$OG=\frac{2}{3}OM=\frac{2\sqrt{10}}{3}\cdots(Ans)$$

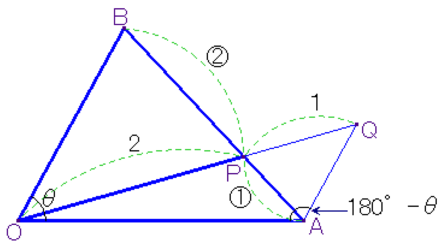


4.5. [参考] 内積の利用と余弦定理の利用の違い

先の例題では，G は重心で OG を延長すれば AB の中点を通りました．それ以外の一般の場合でも，平行補助線を引くと余弦定理で長さを求めることが出来ます．

[例] 例えば，線分 AB を 2:1 に内分する点を P とし，OA, OB，$\angle$AOB (=θ) が分かっているとします．

A を通り OB に平行な直線と OP の交点を Q とすると，
$\angle \mathrm{OAQ} = 180° - \theta$．　よって△OAQ に余弦定理を使うと，



$$\begin{aligned}\mathrm{OQ}^2 &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AQ}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\cos(180° - \theta) \\ &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AQ}^2 + 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\cos\theta\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathrm{OP} &= \frac{2}{3}\mathrm{OQ} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AQ}^2 + 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\cos\theta} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{OA}^2 + \frac{\mathrm{OB}^2}{4} + 2\mathrm{OA}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{2}\cdot\cos\theta} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{4\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 + 4\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

一方，同じ計算を内積でやると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = \frac{1}{9}\left\{4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} = \frac{1}{9}\left\{4\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 + 4\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta\right\}$$

ゆえに，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \frac{1}{3}\sqrt{4\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 + 4\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta} \cdots ②$$

このように，平面では余弦定理を使っても，内積を使っても 距離や角度は求まります．しかも平行補助線を使えば手間は余り代わりません．しかし，空間では，内積を使ったほうが 遥かに楽なことが多くなります．