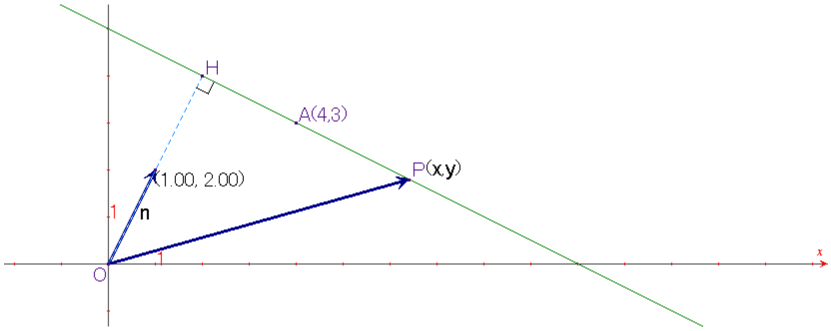
5．点と直線の距離，直線と内積

例 1.

$\mathrm{A}(4,3)$ を通り, $\vec{n}=(1,2)$ と直交する直線を l とする.
(1) l 上の任意の点を$P(x,y)$とするとき，x ,y の間の関係式を求めよ.
(2) Oから l に下ろした垂線の足をHとする．OHの長さを求めよ.



(1)「l の傾きは$\left(-\frac{1}{2}\right)$，さらに，点 A(4,3)を通るから」

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-4)\Longleftrightarrow x+2y=10$$

【別解】これでも良いですが，直線 OH を「スクリーン」として，内積の正射影としての意味を使うと，

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\mathrm{OH}\times|\vec{n}| \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\mathrm{OH}\times|\vec{n}|\end{cases}\quad\cdots①$$

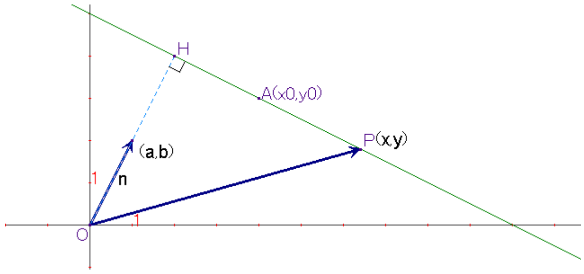
故に「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」です.（ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$の OH の上への正射影は同じ!）．成分表示して，

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x+2y=10\cdots②$$

(2) ②は，「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=10$ （一定)」を表しています．よって①より，

$$\mathrm{OH}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{n}|}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

5-1. 直線と内積，点と直線の距離の公式(原点との距離)



一般に，$\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$に垂直で，点 $\mathrm{A}(x_0,y_0)$ を通る直線上の点を $\mathrm{P}(x,y)$ とすると，

ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$の$\vec{n}$の上への正射影は同じだから，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

成分表示して，

$$ax+by=ax_0+by_0$$

すなわち，

$\mathrm{A}(x_0,y_0)$ を通り，$\vec{n}=(a,b)$ に垂直な直線 l 上の点を $\mathrm{P}(x,y)$ とすると， $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n} \iff (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\vec{n}=0 \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} \iff ax+by=ax_0+by_0$

このように，

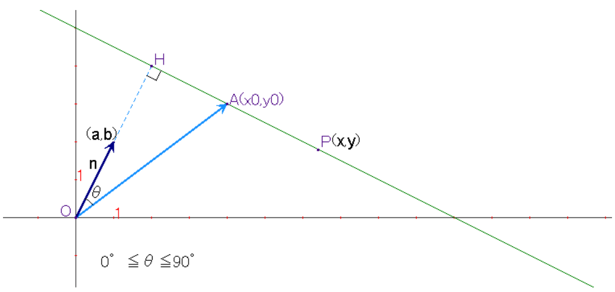
$ax+by=c$ は，$\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$に垂直な直線を表します．

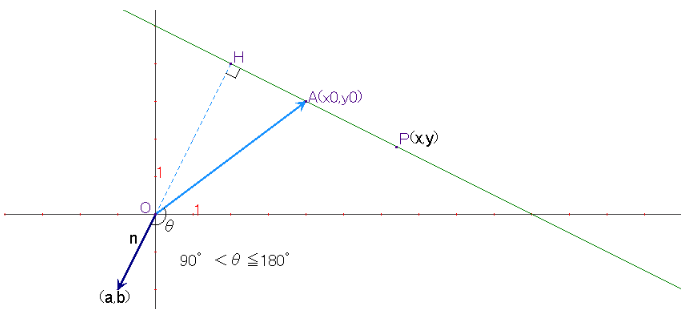
また O から直線lに下ろした垂線の足を H，$\vec{n}$ と$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$のなす角を$\theta$とすると，「正射影」の考え方から

$$\begin{cases} 0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ \text{ のとき}, \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\vec{n}|\times\mathrm{OH} \\ 90^\circ<\theta\leq 180^\circ \text{ のとき}, \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-|\vec{n}|\times\mathrm{OH} \end{cases}$$

「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=ax_0+by_0=-c$」とおくと，直線 l は「$l: ax+by+c=0$」．そして，l と原点との距離は

$$\mathrm{OH}=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|ax_0+by_0\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|c|}{|\vec{n}|}$$

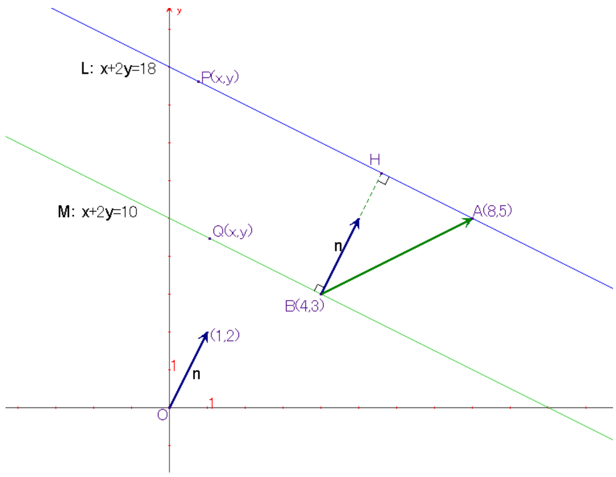




5-2. 点と直線の距離(一般の場合)

例 2

> A(8,5) を通り $\vec{n}=(1,2)$ と直交する直線を l , B(4,3) を通り $\vec{n}=(1,2)$ と直交する直線を m とする.
> (1) l 上の任意の点をP(x,y)とするとき, x,y の間の関係式を求めよ.
> (2) m 上の任意の点をQ(x,y)とするとき, x,y の間の関係式を求めよ.
> (3) l とmの距離(図のBH)を求めよ.



(1) 「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」だから

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x+2y=18\cdots①$$

(2) 「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」だから

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x+2y=10\cdots②$$

(3) $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ のなす角は鋭角だから,

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=|\vec{n}|\times\mathrm{BH}$$

ゆえに,

$$\mathrm{BH}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\vec{n}|}=\frac{\vec{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{|\vec{n}|}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\vec{n}|}\cdots③$$

① より「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=18$」, ②より「$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=10$」だから, ③へ代入して,

$$\mathrm{BH}=\frac{18-10}{|\vec{n}|}=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

5-3. 点と直線の距離の公式 (一般の場合)

上の③の式は,

> 互いに平行な2直線「$ax+by=c_1$」と「$ax+by=c_2$」との距離は,
> $$h=\frac{|c_1-c_2|}{|\vec{n}|}\cdots(*)$$

で与えられることを示しています. (特に原点を通る直線: 「$ax+by=0$」と「$ax+by=c$」との距離は「 $h=\dfrac{|c|}{|\vec{n}|}$」となり, 「5-1 節」で述べた公式と一致します.)

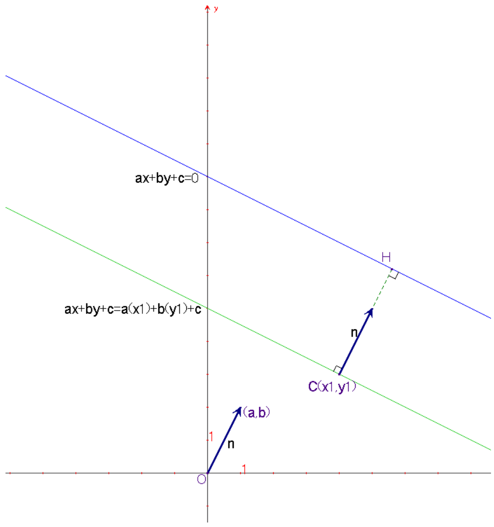
次に$\mathrm{C}(x_1, y_1)$と直線 $l: ax+by+c=0$ との距離を求めます.
Cを通り, lに平行な直線の式は,

$$ax+by+c=ax_1+by_1+c \cdots ①$$

ゆえに(*)から,

点(x_1, y_1) と $ax+by+c=0$ との距離を h とすると,

$$h=\frac{|c_1-c_2|}{|\vec{n}|}=\frac{|(ax_1+by_1+c)-0|}{|\vec{n}|}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdots (**)$$



これがいわゆる「**点と直線との距離の公式**」です. 個人的には(*)の方が, 意味が明確で良いと思います.
なお, 公式の分子の「ax_1+by_1+c」は, ①の右辺の値を表します.

5-4. CabriⅡによる検証

互いに平行な2直線「$ax+by=c_1$」と「$ax+by=c_2$」との距離は,

$$h=\frac{|c_1-c_2|}{|\vec{n}|} \cdots (*)$$

を CabriⅡで確かます. 法線ベクトルは「$\vec{n}=(3,4)$」で固定です. 点A,B,Pを動かしてみてください. 点Qは点Pから直線mに下ろした垂線の足になっています. PやQの(x,y)成分を使って「$3x+4y$」の値(c_1, c_2)を計算してみてください. PQの長さを電卓で計算してみて, 上の公式の結果と一致することを確かめてみてください. [distance.html]