2.ベクトルの成分

2.1 定義

O を原点とする(直交)座標系が与えられたとき，x 軸正方向の単位ベクトル(長さが 1 のベクトル)を $\vec{e_1}$, y 軸正方向の単位ベクトル)を $\vec{e_2}$ とします.（このようなベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を**基本ベクトル**と言います）.
この平面上の任意のベクトル $\vec{a}$ が与えられたとき，第 1 節の最後で述べたように，

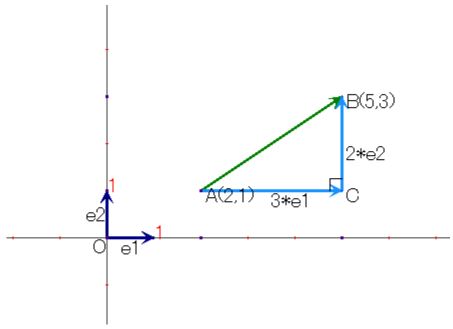
$$\vec{a} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} \cdots (*)$$

の形で一通りに表せます．この時「a_1 を $\vec{a}$ の x 成分」,「a_2 を $\vec{a}$ の y 成分」と定めます．また，(∗)を

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

のように**省略**して書くこともあります.

例えば，右図のように A(2,1), B(5,3) のとき，（ A を通り x 軸に平行な直線と，B を通り y 軸に平行な直線の交点を C とすると，）



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \cdots (**)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の「x 成分は 3」，「y 成分は 2」となります.
また，(**) を省略して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,2)$$

と書くことも出来ます.

すなわち，ベクトル $\vec{a}$ の x 成分，y 成分はそれぞれ

始点から終点までの x 軸正方向への移動量,
始点から終点までの y 軸正方向への移動量

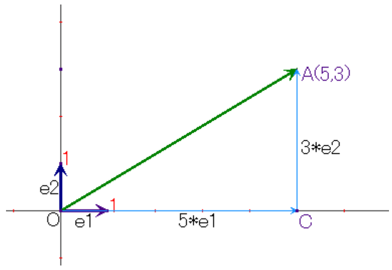
と等しいです.（ただしどちらも移動の方向も考え，負方向への移動には，負の数を使います）

一般には，$\vec{a}$ の成分は，始点や終点の座標とは一致しません．（A や B の座標成分とは同じでない）．
しかし，始点が原点のときは，$\vec{a}$ の成分は，終点の座標と一致します．

例えば左図で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 5\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$ だから，「$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (5,3)$」と書けますが，
A の成分も「$\mathrm{A}(5,3)$」となり一致します．これは

原点から，x 軸正方向に 5，y 軸正方向に 3 移動した点は，点(5,3)

と言うことで当たり前です．すなわち，



$\mathrm{A}(a_1,a_2)$ のとき「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$」と書けるから， $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1,a_2)$

しかし，一般には，「点の成分」と「ベクトルの成分」は異なります．

$\mathrm{A}(a_1,a_2),\mathrm{B}(b_1,b_2)$ のとき，A から B への移動量は，

$$\begin{cases} x \text{ 軸正方向には, } \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (b_1-a_1)\vec{e_1} \\ y \text{ 軸正方向には, } \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (b_2-a_2)\vec{e_2} \end{cases}$$

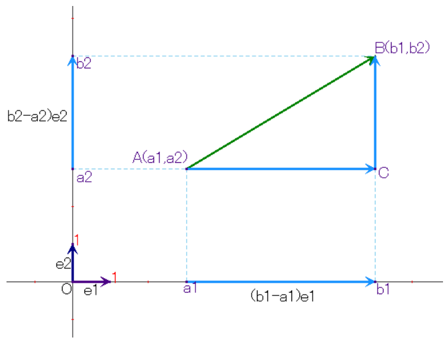
よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1-a_1)\vec{e_1} + (b_2-a_2)\vec{e_2}$$

省略して書くと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1-a_1, b_2-a_2)$$

すなわち，



$\mathrm{A}(a_1,a_2),\mathrm{B}(b_1,b_2)$ のとき「$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1-a_1)\vec{e_1} + (b_2-a_2)\vec{e_2}$」と書けるから， $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1-a_1,b_2-a_2)$

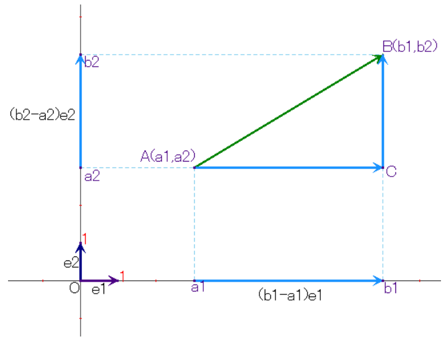
また，「始点が原点のときは，$\vec{a}$ の成分は，終点の座標と一致する」ので，点 A の位置を表すのに，点 A の成分でなく，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の成分を使うことも出来ます．この意味で「始点が O のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」を「A の位置ベクトル」（A の位置を表すベクトル）といいます．（私も高校生のときは「何故そんなベクトルを考えるのか？今までどおり 点の座標 を使えばいいじゃない?」と思いましたが，実は点の座標もベクトルを使って定義してしまい，「全部ベクトルで表したい」と言う望みから来ています．）

2-1-2. CabriⅡによる検証

次の図で A,B を動かして，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分がどう変化するか見てください．　coordinates.html

2-2. ベクトルの大きさ

右図の 三角形 ACB に三平方の定理を使うと,



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

となります. すなわち,

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} = (a_1, a_2) \text{ のとき,} \\ \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2} \end{array}}$$

2-3. 和,差,実数倍の成分

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ と表されているとき, これは,「$\vec{a} = a_1\, \overrightarrow{e_1} + a_2\, \overrightarrow{e_2}$, $\vec{b} = b_1\, \overrightarrow{e_1} + b_2\, \overrightarrow{e_2}$」の省略だから, 第一節「ベクトルの計算法則」より,

$$\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} = (a_1\, \overrightarrow{e_1} + a_2\, \overrightarrow{e_2}) + (b_1\, \overrightarrow{e_1} + b_2\, \overrightarrow{e_2}) = (a_1 + b_1)\overrightarrow{e_1} + (a_2 + b_2)\overrightarrow{e_2} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \vec{a} - \vec{b} = (a_1\, \overrightarrow{e_1} + a_2\, \overrightarrow{e_2}) - (b_1\, \overrightarrow{e_1} + b_2\, \overrightarrow{e_2}) = (a_1 - b_1)\overrightarrow{e_1} + (a_2 - b_2)\overrightarrow{e_2} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \\ k\vec{a} = k(a_1\, \overrightarrow{e_1} + a_2\, \overrightarrow{e_2}) = (ka_1)\overrightarrow{e_1} + (ka_2)\overrightarrow{e_2} = (ka_1, ka_2) \end{cases}$$

省略形だけで表すと,

$$\boxed{\begin{cases} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \\ k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2) \end{cases}}$$

2-4 [参考]ベクトルのスッキリした定義

大学では，「長さと方向を持つ量」のような図形的な定義をせずに，幾つかの数を束ねたものをベクトルと定義します. すなわち 2 次元ベクトル (平面上の矢印とは限らないのでこのように言います) とは，$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$ のように，二つの数をまとめたものと定義します．また $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和，差，実数倍も，次のように定義します.

$$\boxed{\begin{cases}(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)\\(a_1,a_2)-(b_1,b_2)=(a_1-b_1,a_2-b_2)\\k(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2)\end{cases}}$$

このように定めた和，差，実数倍が，平面ベクトルでは，通常の図形的定義と一致することは簡単に確かめられます.

また，ベクトルの演算規則：

$$\begin{cases}\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \text{(交換法則)}\\(s+t)\vec{a}=s\vec{a}+t\vec{a}\\s(t\vec{a})=st\,\vec{a}\\(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \quad \text{(結合法則)}\\k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \quad \text{(三角形の相似)}\end{cases}$$

が成り立つことは，単純計算で厳密に確かめられます. 例えば，結合法則の証明は，次のようにします.

$\vec{a}=(a_1+a_2),\ \vec{b}=(b_1,b_2),\ \vec{c}=(c_1,c_2)$ とすると，

$$\begin{cases}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(a_1+b_1,a_2+b_2)+(c_1,c_2)=((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2)=(a_1+b_1+c_1,a_2+b_2+c_2)\\\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(a_1,a_2)+(b_1+c_1,b_2+c_2)=(a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2))=(a_1+b_1+c_1,a_2+b_2+c_2)\end{cases}$$

$$\therefore (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

ここには，図形的イメージは全くありません． それは各人の主観に任されています．個人が頭の中で何をイメージしているかは自由ですが，上の「結合法則の証明」のように，「命題の真偽」については全員が納得せざるを得ません．大学では「全員が納得せざるを得ない命題の証明」が中心となります．それは「大学の数学」と「高校の数学」の大きな違いです．興味を持たれた方は，大学の教科書を読んでください.