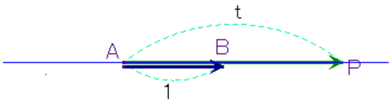
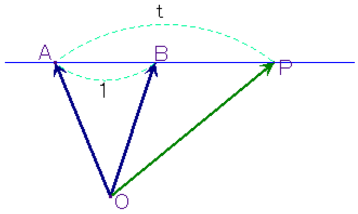
4.共線条件

$$
\begin{aligned}
\text{Pが直線AB上にある} &\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (t\ \text{は任意の実数}) \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t\,(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (\,s+t=1\,)
\end{aligned}
$$

（ただし O は，直線 AB 上に無い任意の点）



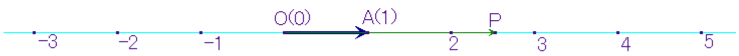
AP=tAB



OP=(1−t)OA+tOB

4 つの表現は全て同値です．2 行目以外は全て大切です．また「$1-t=s$」とおくと，「$s+t=1$」ですから，3 行目から 4 行目にはすぐ移れます．よって「**始点が直線上にあるとき**」(左上図) と「**始点が直線上に無いとき**」（右上図）の二つの場合になります．

4-1. 始点 O が直線上にあるとき



OP=tOA, t=2.53

P が直線 OA 上にある時，

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (\,t\ \text{は任意の実数})}$$

と表されます．上の図では t=2.53 です．数直線の下についている「**目盛り**」が，**P がそこに来た時の t の値**を示しています．特に 「P=A のときは $t=1$」,「P=O のときは t=0」です． このように

t の値は，$\overline{\mathrm{OA}}$ を単位長に取って作った目盛り

です．

4-1-1 CabriⅡによる検証

P を動かしたときの t の値を読んで，それが**数直線の目盛り**であることを確認してください．
OP=tOA.html

4-2. 始点 O が直線 AB 上に無いとき

P が直線 AB 上にある条件は,

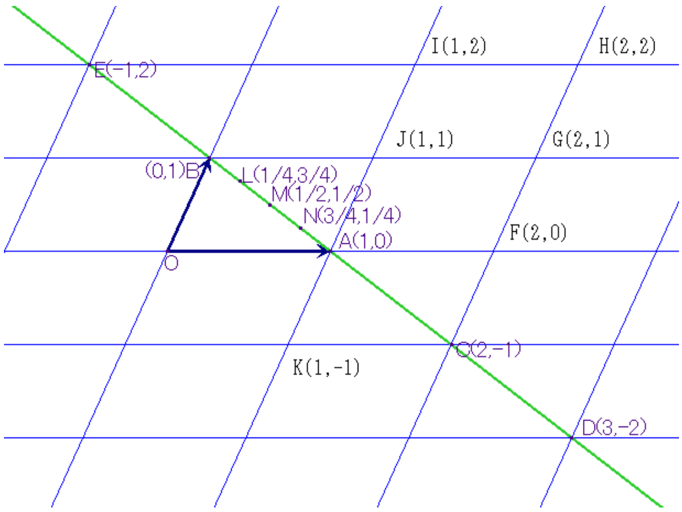
$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= s\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s+t=1)\end{aligned}}$$

平面上の任意の点 P に対し,「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(s, t$ は実数$)$」と一通りに表せますが，P が直線 AB 上にある時に限り 「$s+t=1$」となります.

例えば下図で,「$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」で「$s+t=2+(-1)=1$」です. そして C は直線 AB 上にあります.（なお，上図で L は線分 AB を 3 : 1 に内分する点，M は中点，N は線分 AB を 1:3 に内分する点です.）

他の点に関しても(s,t)の値を求めてみると,

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \to (s,t) = (2,-1) \\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-2)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \to (s,t) = (3,-2) \\ \overrightarrow{\mathrm{OE}} = (-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} \to (s,t) = (-1,2) \\ \overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \to (s,t) = \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) \\ \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \to (s,t) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \to (s,t) = \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$



全て 「$s+t=1$」となり，従って，直線 AB 上にあります.

【注】上図で「C(2,−1)」と書き込んだのは,「$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」の略です.「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」で表される点 P に対し「実数の組$(s,t)$」を書き込んでいます.

4-2-1 Cabri II による検証.

P を色々動かしてみて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$に対応する$(s,t)$の値を読み取ってください. 何か気づきませんか？　また P が直線上にある時は「$s+t=1$」となることを確認してください.

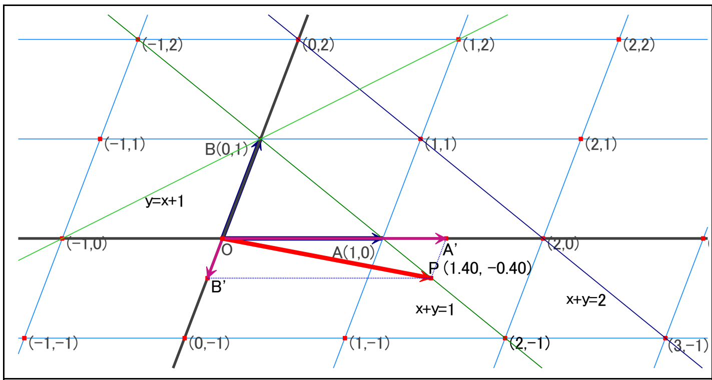
s+t=1.html

4-3. 斜交座標

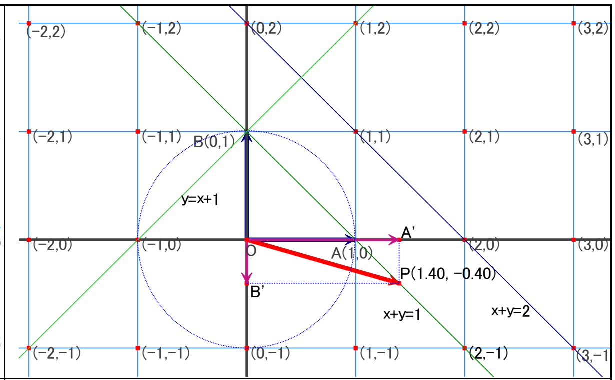
「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」で表される点 P に「$t$」を対応させると，$t$ は 「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を単位長とする目盛り」のようなものでした．同様に

「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」で表される点 P に対し「実数の組 (s,t)」を対応させると,「(s,t) は A$(1,0)$, B$(0,1)$ としたときの座標のようなもの」になります. これを ($\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基底にした)「斜交座標」といいます.

これに対し，今までのように直交する座標軸を用いた座標を「直交座標」と言います.



斜交座標



直交座標

また,

「 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$,　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$」(単位直交ベクトル) の時は，斜交座標は直交座標と本質的に同じ

になります．よって,

「直交座標」は「斜交座標」の特別なものとして,「斜交座標」に含められます.

ちょうど「正三角形が 2 等辺三角形に含まれる」ようなものです.

4-3-1 直線の方程式と共線条件

直交座標で直線 AB の式は 「$x + y = 1$」ですが，これは「x 座標と y 座標の和が 1」になるような点の軌跡です．すなわち 「$(x,y) = (-1,2),(0,1),(1,0),(2,-1),(3,-2)\cdots$」のような点の集まりです.

一方，「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　$(s+t=1)$」を満たすような点は,

「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$(s,t) = (-1,2),(0,1),(1,0),(2,-1),(3,-2)\cdots$ 」などの点の集まりです.

そして，斜交座標と直交座標は「正方形を平行四辺形に代えた」だけの違いしかないので，斜交座標でも「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　$(s+t=1)$」は直線 AB を表します.

他の直線についても同様です．(上の 2 つの図を比較してください.)

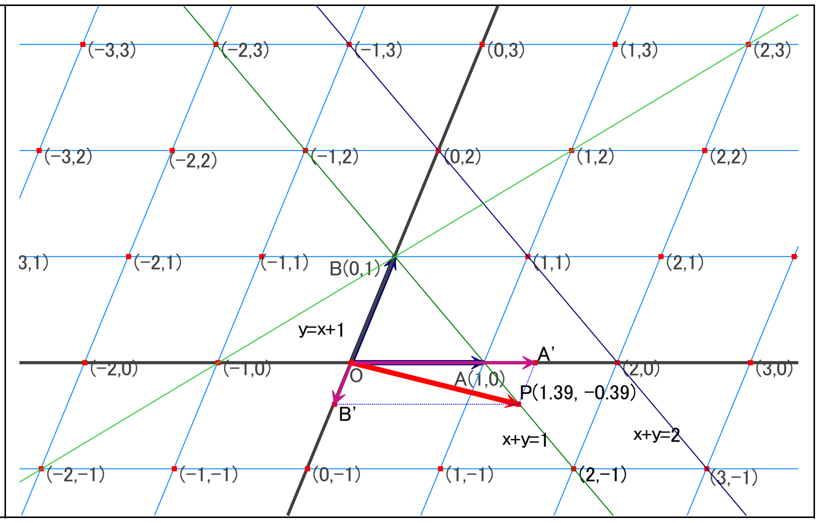
即ち，直交座標系の直線「$x + y = 2$」には，斜交座標系の直線「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　$(s+t=2)$」が,

「$y = x + 1$」には「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　$(t = s+1)$」が対応します.

$$
\begin{cases}
x+y=1 \\
x+y=2 \\
y=x+1
\end{cases}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} & (s+t=1) \\
\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} & (s+t=2) \\
\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} & (t=s+1)
\end{cases}
$$



4-3-2 Cabri II による検証

Cabri II で，実際に上のことを確かめましょう．P,A,B は引っ張れます． shakou-zahyou.html

- ✓ A,B を動かして，直交座標は斜交座標の特別なものであることを確認してください．
- ✓ P を 3 つの直線上を動かして，P が直線「$x+y=1$」上を動くときは，「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数の和が 1」となることを，P が直線「$x+y=2$」上を動くときは，「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数の和が 2」となることを，P が直線「$y=x+1$」上を動くときは，「($\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の係数)=($\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の係数)+1」となることを確かめましょう．