2.内積の分配法則

$$\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}$$

2-1.正射影を使った図形的証明

高校でのやり方と違い「内積≒正射影」を使って，内積の分配法則を導いてみます.（香港の教科書ではこのやり方でやっているものもあります.）

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, さらに B,C から直線 OA に下ろした垂線の足を B',C', さらに, B を通り $\vec{a}$ と平行な直線に C から下ろした垂線の足を H とします. このとき,「$\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$ かつ $\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$」だから,「平面CC'H ⊥ 直線OA」. よって 四角形 BB'C'H は長方形 となります.

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ方向を向いているとき.

直線 OA を「スクリーン」と考えて正射影することにより,

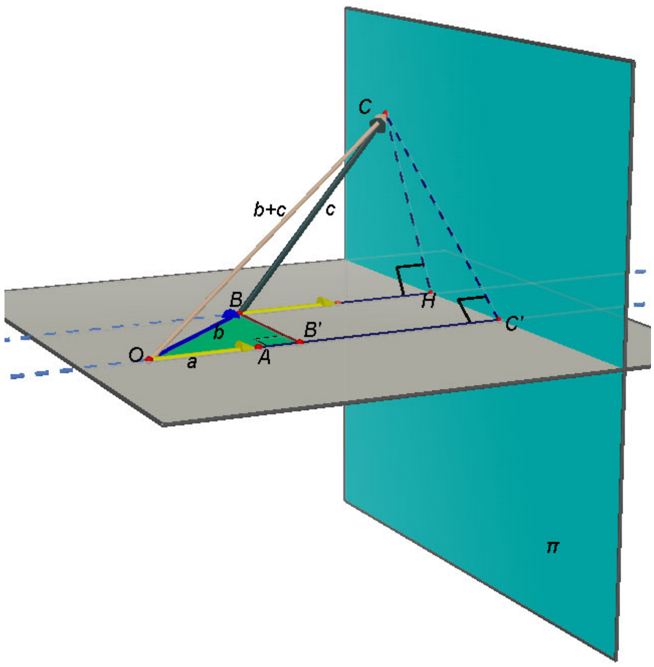
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathrm{OA}\times\mathrm{OB'},\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\mathrm{OA}\times\mathrm{OC'}$$

さらに, $\vec{a}$ の始点を B に平行移動し, 直線 BH を「スクリーン」と考えて正射影すると,

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\times\mathrm{BH}=\mathrm{OA}\times\mathrm{B'C'}$$

ところが「OB'+B'C'=OC'」だから,

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}&=\mathrm{OA}\times\mathrm{OB'}+\mathrm{OA}\times\mathrm{B'C'}\\&=\mathrm{OA}\times(\mathrm{OB'}+\mathrm{B'C'})\\&=\mathrm{OA}\times\mathrm{OC'}\\&=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\end{aligned}$$



[注] $\vec{b},\vec{c},(\vec{b}+\vec{c})$ の直線 OA 上への正射影ベクトルは, それぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}(=\overrightarrow{\mathrm{BH}}), \overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ です.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が同一平面上になくとも,

「($\vec{b}+\vec{c}$ の正射影ベクトル) ＝ ($\vec{b}$ の正射影ベクトル) ＋ ($\vec{c}$ の正射影ベクトル)」

が成り立つことがポイントになります.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と同じ方向，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と反対方向を向いているとき
直線 OA を「スクリーン」と考えて正射影することにより，

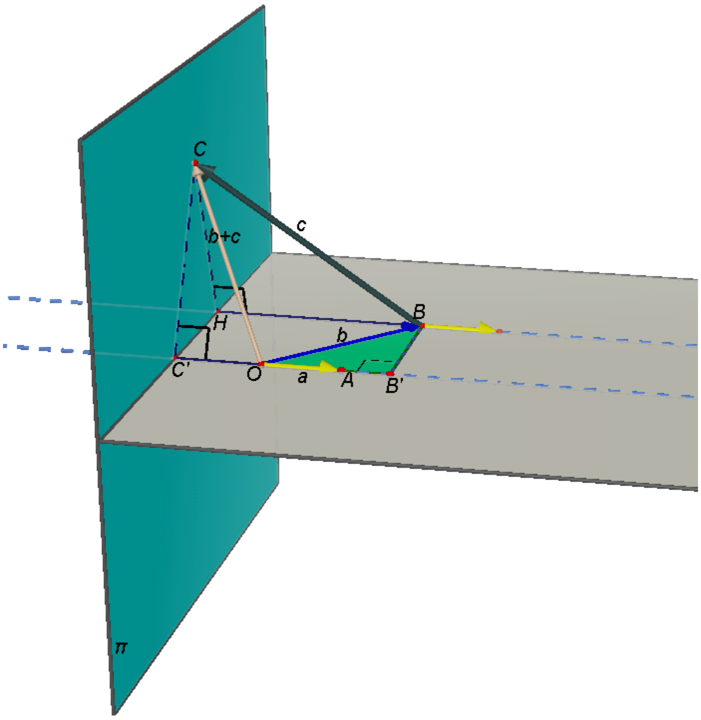
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \mathrm{OA}\times\mathrm{OB'}, \quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = -\mathrm{OA}\times\mathrm{OC'}$$

さらに，$\vec{a}$ の始点を B に平行移動し，直線 BH を「スクリーン」と考えて正射影すると，

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = -|\vec{a}|\times\mathrm{BH} = -\mathrm{OA}\times\mathrm{B'C'}$$

ところが「$\mathrm{OB'}-\mathrm{B'C'}=-\mathrm{OC'}$」だから，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} &= \mathrm{OA}\times\mathrm{OB'}-\mathrm{OA}\times\mathrm{B'C'}\\ &= \mathrm{OA}\times(\mathrm{OB'}-\mathrm{B'C'})\\ &= \mathrm{OA}\times(-\mathrm{OC'})\\ &= \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\end{aligned}$$



(i),(ii)以外の場合でも，同様にして証明されます．（略）

2-2. Cabri 3 D による検証.

A,B,C を Drag してみてください．点を上下に移動するには「Shift キー」を押したままで Drag します．「Shift キー」を押さないとベースの平面と平行に動くだけです．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．

[distribution law.html]