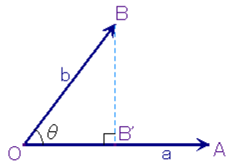
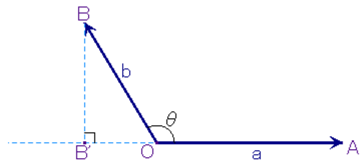
3．内積と成分

3-1. 一方のベクトルが座標軸上にある時の「内積の成分表示」

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$， $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$， B から直線 OA に下ろした垂線の足を B’ とします．このとき，第一節から，



0° ≦θ≦90° のとき
a・b=OA*OB*cosθ=OA*OB'



90° <θ≦180° のとき
a・b=OA*OB*cosθ=OA*(−OB')=−OA*OB'

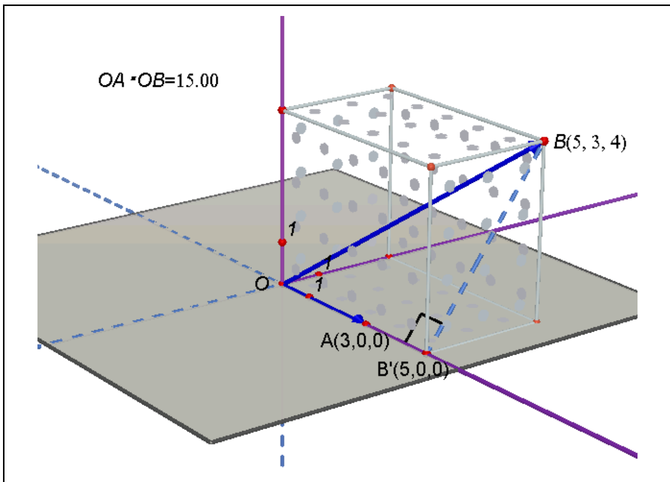
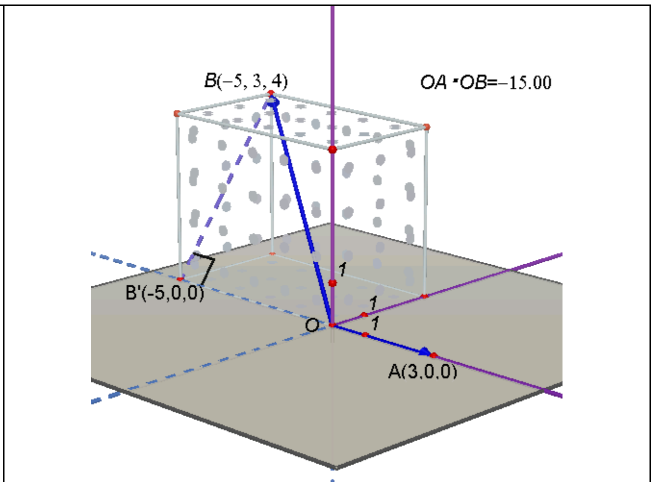
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 方向に x 軸を取り，A,B の座標が $\mathrm{A}(a_1,0,0)$，$\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$ とすると，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}'=a_1b_1 & (0^\circ \le \theta \le 90^\circ\text{のとき})\\ \mathrm{OA}\times(-\mathrm{OB}')=a_1b_1 & (90^\circ<\theta \le 180^\circ\text{のとき})\end{cases}$$

すなわち，一方のベクトルが x 軸上にある時は，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1 \qquad \cdots(*)$$

が成り立ちます．　（下の例もご覧ください）．

	
[$0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ のとき]	[$90^\circ < \theta \le 180^\circ$ のとき]

【注】(*)は，「符号付面積」を単に数字で表しただけです．

3-1-0. Cabri3D による検証

A,B を drag して下さい．　inner product&coordinates0.html

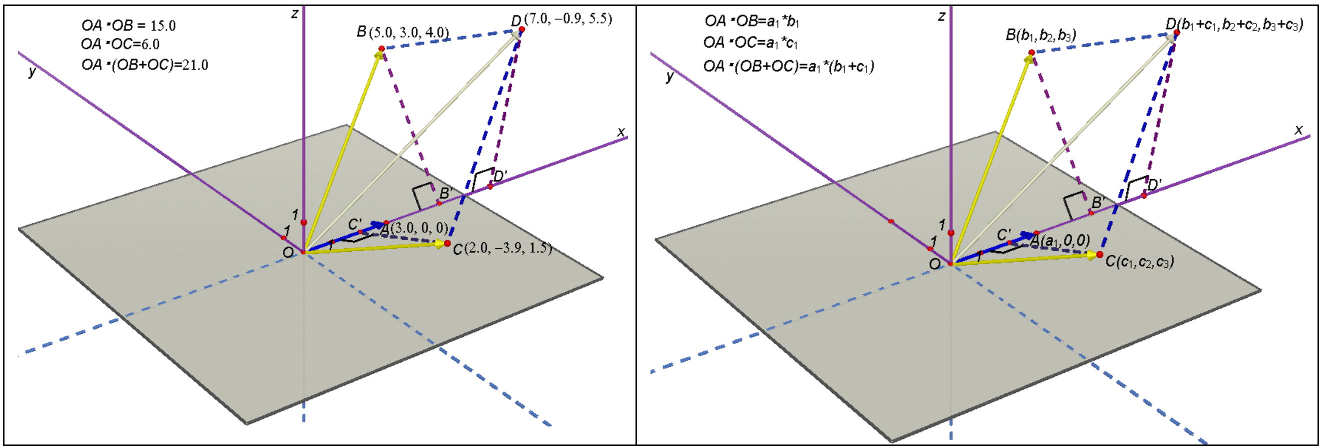
点を上下に移動するには「Shift キー」を押したままで Drag します．「Shift キー」を押さないとベースの平面と平行に動くだけです．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．

3-2. 内積の分配法則の「スッキリした」証明

(*)を使うと，内積の分配法則の証明も綺麗にできます． $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 方向に x 軸を取り， $\mathrm{A}(a_1,0,0), \mathrm{B}(b_1,b_2,b_3), \mathrm{C}(c_1,c_2,c_3)$ とすると， $\mathrm{D}(b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3)$．
よって，(*)より，

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1 \\ \vec{a}\cdot\vec{c}=a_1c_1 \\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1) \end{cases}$$

故に，第 2 節でやったような場合わけは必要なく「$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$」が成り立ちます．そして，*$x$* **軸のとり方は自由だから**，常に「$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$」が成り立つことが証明されたことになります．



[例]　　　　[一般の場合]

【注】(*)は，「符号付面積」を単に数字で表しただけですから　本質的には同じです．実数の持つ性質を利用しているので，簡単になっただけです．

3-2-1 Cabri3D による検証

点 A, B, C を drag して見てください．　[distribution_law.html]

点を上下に移動するには「**Shift** キー」を押したままで **Drag** します．「**Shift** キー」を押さないとベースの平面と平行に動くだけです．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．

3-3. 一般のベクトルでの「内積の成分表示」

分配法則を利用すれば，一般の場合の「内積の成分表示」も簡単にできます．

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$，さらに $\mathrm{C}(b_1,0,0)$, $\mathrm{D}(0,b_2,0)$, $\mathrm{E}(0,0,b_3)$ とすると，

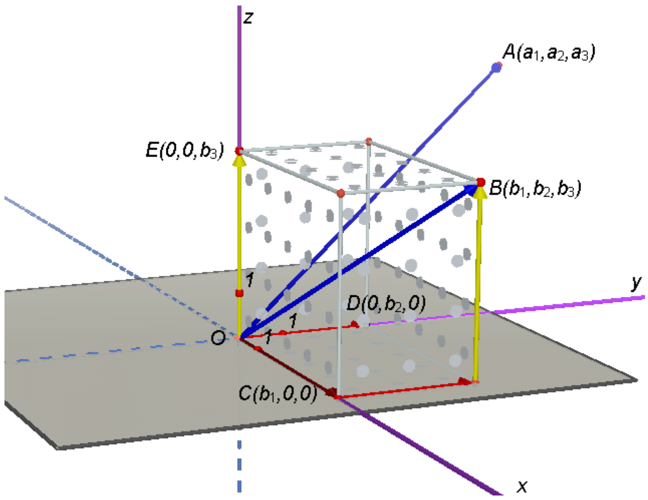
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

ゆえに，分配法則「$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$」より，（直線 OA を「スクリーン」と考えて）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}})=\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdots①$$

ところが $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は，x 軸上のベクトルだから 3.1 より，（x 軸を「スクリーン」と考えて）

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=a_1b_1$$



同様に $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は，y 軸上のベクトルだから，（y 軸を「スクリーン」と考えて）

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=a_2b_2$$

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は，z 軸上のベクトルだから，（z 軸を「スクリーン」と考えて）

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=a_3b_3$$

ゆえに①から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

すなわち，

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\ \text{のとき，}\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{array}}$$

3-2-1 Cabri3D による検証

A,B を drag して下さい． [inner product&coordinates.html]

点を上下に移動するには「Shift キー」を押したままで Drag します．「Shift キー」を押さないとベースの平面と平行に動くだけです．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．