4.　余弦定理との関係

平面ベクトルと同様に，次の性質が成り立ちます．

4.1. 内積の計算法則

1°	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	(交換法則)
2°	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	(分配法則)
3°	$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$	

4.2. 内積の定義，定理のまとめ

内積の定義・定理をまとめました．（第 1～3 節）．上の「1°,3°」は，「当たり前」として省きました．

$\boxed{1}$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　(内積の定義)

($\boxed{1}$の系)　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，　$\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\boxed{1'}$　「内積」=「スクリーンの長さ」×「正射影の長さ」（内積の図形的定義）

$\boxed{2}$　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　(分配法則)

$\boxed{3}$　$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ のとき，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3c_3$　(定理)

平面ベクトルとの違いは，$\boxed{3}$ で z 成分が必要になるだけです．　ここでは，$\boxed{1}$'から直接$\boxed{2}$を導き，さらに$\boxed{2}$から$\boxed{3}$を導きました．教科書では，普通，余弦定理を用いて$\boxed{1}$から$\boxed{3}$を導き，さらに$\boxed{3}$から$\boxed{2}$を導きます．　しかし CG にするには前者の方がよいので，このやり方にしました．（香港の高校の教科書では，私と同じ順序で証明しているものもあります.）

4.3. 内積から余弦定理を導く

「$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$」と「$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$」を使うと，色々な図形問題に応用できます．

平面と同様，内積の基本的な使い方は

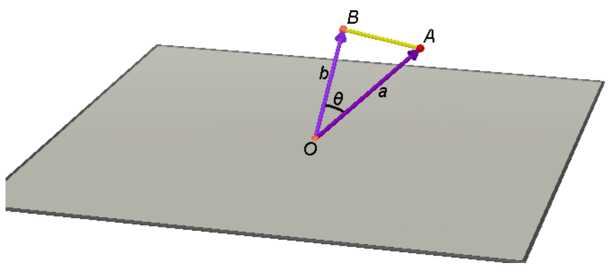
長さや角度を求めるときに，余弦定理の代わりに使う

ことです．内積は余弦定理の代わりに使えます．

実際，空間でも内積の性質(上の$\boxed{1}$と$\boxed{2}$)から，余弦定理が導けます．

【証明】$\angle$AOB=θ，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 &= \left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 \\
&= (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) && \leftarrow |\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a} \\
&= \vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a} && \leftarrow \text{分配法則} \\
&= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b} && \leftarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \\
&= \mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta && \text{(余弦定理)}
\end{aligned}
$$



【注】二つのベクトルを含む平面上で考えればよいので　空間でも成り立つのは 当然です．

4.4．空間での余弦定理（空間余弦定理）

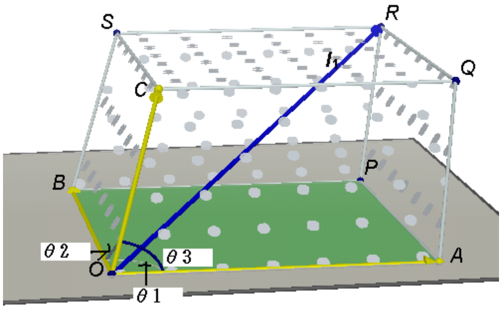
通常の余弦定理だけでなく，空間では，内積を使い「余弦定理の一般化（空間余弦定理)」ができます．

(すなわち，内積＞通常の余弦定理　と言えます．なお「空間余弦定理」というのは，ここだけの名前です).

右下の平行六面体 OAPB-CQRS に於いて，

$\overline{\mathrm{OA}}=a, \overline{\mathrm{OB}}=b, \overline{\mathrm{OC}}=c, \angle\mathrm{AOB}=\theta_1, \angle\mathrm{BOC}=\theta_2, \angle\mathrm{COA}=\theta_3, \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta_1, \vec{b}\cdot\vec{c}=bc\cos\theta_2, \vec{c}\cdot\vec{a}=ca\cos\theta_3.$$



ゆえに，対角線の長さ $l_1=\overline{\mathrm{OR}}$ とすると，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2&=\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\&=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2\,\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=a^2+b^2+c^2+2ab\cos\theta_1+2bc\cos\theta_2+2ca\cos\theta_3\cdots(*)\end{aligned}$$

特に OA⊥OB, OB⊥OC, OC⊥OA のときは，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2=a^2+b^2+c^2 \quad \text{(三平方の定理)}$$

これを発展させると

> $\vec{p}=s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c}$ (s,t,u は実数)と表されているとき，
>
> $$\begin{aligned}\left|\vec{p}\right|^2&=\left|s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c}\right|^2=(s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c})\cdot(s\,\vec{a}+t\,\vec{b}+u\,\vec{c})\\&=s^2\left|\vec{a}\right|^2+t^2\left|\vec{b}\right|^2+u^2\left|\vec{c}\right|^2+2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\,\vec{c}\cdot\vec{a}\quad\text{(余弦定理の発展)}\end{aligned}$$
>
> 特に 「$\vec{a}\perp\vec{b}$ かつ $\vec{b}\perp\vec{c}$ かつ $\vec{c}\perp\vec{a}$」のとき，
>
> $$\left|\vec{p}\right|^2=s^2\left|\vec{a}\right|^2+t^2\left|\vec{b}\right|^2+u^2\left|\vec{c}\right|^2 \quad \text{(三平方の定理)}$$

(s,t,u) が直交座標なら，「$\mathrm{P}(s,t,u)$ と原点との距離は $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=s^2+t^2+u^2$ 」ですが，一般の斜交座標のときは，上のようにやや複雑になります．（これを公式として覚える必要はありません.）

4.4.1. 【寄り道】「空間余弦定理」の「平面上の余弦定理」による証明.

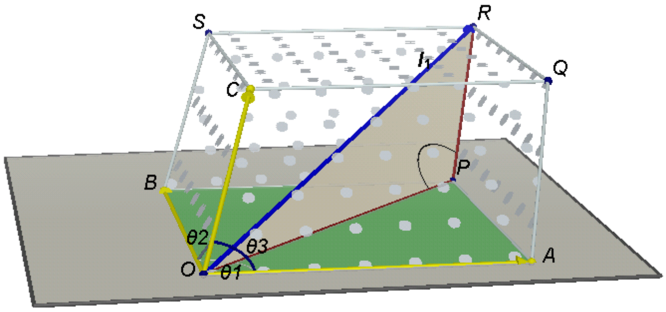
上の(*)をより理解するために，通常の余弦定理から，(*)を導いてみましょう.

右下の平行六面体 OAPB-CQRS に於いて，

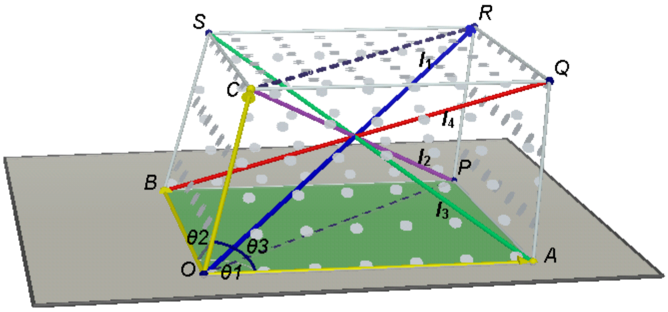
$$\overline{\mathrm{OA}} = a, \overline{\mathrm{OB}} = b, \overline{\mathrm{OC}} = c, \angle\mathrm{AOB} = \theta_1, \angle\mathrm{BOC} = \theta_2, \angle\mathrm{COA} = \theta_3, l_1 = \overline{\mathrm{OR}}, l_2 = \overline{\mathrm{CP}}, l_3 = \overline{\mathrm{AS}}, l_4 = \overline{\mathrm{BQ}}$$

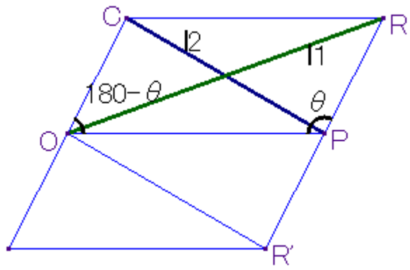
と置きます.

しかし，∠OPR が分からないので，大変です.



そこで，対称性に注目し，$l_1 = \overline{\mathrm{OR}}, l_2 = \overline{\mathrm{CP}}, l_3 = \overline{\mathrm{AS}}, l_4 = \overline{\mathrm{BQ}}$ をまとめて求めてみましょう.





∠OPR=θ とおいて，△OPR，△OCP に余弦定理を使うと，

$$\begin{cases} l_1{}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{PR}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{PR}\cdot\cos\theta \\ l_2{}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{PR}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{PR}\cdot\cos(180^\circ - \theta) = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{PR}^2 + 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{PR}\cdot\cos\theta \end{cases}$$

各辺を足して，

$$l_1{}^2 + l_2{}^2 = 2(\mathrm{OP}^2 + \mathrm{PR}^2) = 2\left\{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \theta_1) + c^2\right\} = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\theta_1)\cdots ①$$

このように∠OPR が求まっていなくとも，四角形 OPRC の「2 本の対角線の長さの 2 乗の和」は簡単に求まり，「隣り合う辺の 2 乗の和の 2 倍」と等しくなります.　(**中線定理** といいます.)

順に 四角形 OPRC，OARS，OBRQ, APSC, BPQC, AQSB に対し，同様の計算をすると，

$$\begin{cases} l_1{}^2 + l_2{}^2 = 2(\mathrm{OP}^2 + \mathrm{PR}^2) = 2\left\{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \theta_1) + c^2\right\} = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\theta_1)\cdots ① \\ l_1{}^2 + l_3{}^2 = 2(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OS}^2) = 2\left\{a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \theta_2)\right\} = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta_2)\cdots ② \\ l_1{}^2 + l_4{}^2 = 2(\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OQ}^2) = 2\left\{b^2 + a^2 + c^2 - 2ca\cos(180^\circ - \theta_3)\right\} = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ca\cos\theta_3)\cdots ③ \\ l_3{}^2 + l_4{}^2 = 2(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AQ}^2) = 2\left\{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta_1 + c^2\right\} = 2(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta_1)\cdots ④ \\ l_2{}^2 + l_4{}^2 = 2(\mathrm{BC}^2 + \mathrm{BP}^2) = 2\left\{b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta_2 + a^2\right\} = 2(a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta_2)\cdots ⑤ \\ l_2{}^2 + l_3{}^2 = 2(\mathrm{AC}^2 + \mathrm{SC}^2) = 2\left\{a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta_3 + b^2\right\} = 2(a^2 + b^2 + c^2 - 2ca\cos\theta_3)\cdots ⑥ \end{cases}$$

①+④より，

$$l_1{}^2+l_2{}^2+l_3{}^2+l_4{}^2=4(a^2+b^2+c^2)\cdots⑦$$

①+②+③より，

$$2l_1{}^2+(l_1{}^2+l_2{}^2+l_3{}^2+l_4{}^2)=6(a^2+b^2+c^2)+4(ab\cos\theta_1+bc\cos\theta_2+ca\cos\theta_3)$$

ゆえに⑦と合わせて，

$$l_1{}^2=a^2+b^2+c^2+2(ab\cos\theta_1+bc\cos\theta_2+ca\cos\theta_3)\cdots(i)$$

これが，(*)の式です．やっと求まりました！ 同様にして $l_2{}^2, l_3{}^2, l_4{}^2$ も求めてみると，

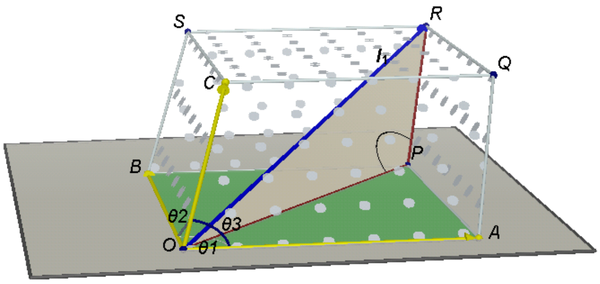
$$\begin{cases} l_1{}^2=a^2+b^2+c^2+2(ab\cos\theta_1+bc\cos\theta_2+ca\cos\theta_3)\cdots(i) \\ l_2{}^2=a^2+b^2+c^2+2(ab\cos\theta_1-bc\cos\theta_2-ca\cos\theta_3)\cdots(ii) \\ l_3{}^2=a^2+b^2+c^2+2(-ab\cos\theta_1+bc\cos\theta_2-ca\cos\theta_3)\cdots(iii) \\ l_4{}^2=a^2+b^2+c^2+2(-ab\cos\theta_1-bc\cos\theta_2+ca\cos\theta_3)\cdots(iv) \end{cases}$$

これらは内積では，それぞれ次の式に対応しています．

$$\begin{cases} l_1{}^2=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=a^2+b^2+c^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\cdots(i)' \\ l_2{}^2=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|^2=a^2+b^2+c^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})\cdots(ii)' \\ l_3{}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|^2=|-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=a^2+b^2+c^2+2(-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})\cdots(iii)' \\ l_4{}^2=|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2=|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|^2=a^2+b^2+c^2+2(-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\cdots(iv)' \end{cases}$$

このように，余弦定理でも「工夫すれば」求まりますが，内積だと「単純計算で」求まります．

今度は、$\cos(\angle \mathrm{OPR})$ の値を求めてみましょう.



$$\cos(\angle \mathrm{OPR})=\frac{\mathrm{OP}^2+\mathrm{PR}^2-\mathrm{OR}^2}{2\cdot \mathrm{OP}\cdot \mathrm{PR}}$$

$$=\frac{a^2+b^2+2ab\cos\theta_1+c^2-\left\{a^2+b^2+c^2+2(ab\cos\theta_1+bc\cos\theta_2+ca\cos\theta_3)\right\}}{2\,c\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta_1}}$$

$$=\frac{-bc\cos\theta_2-ca\cos\theta_3}{c\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta_1}}\cdots(**)$$

一方，内積を利用すると、

$$\cos(\angle \mathrm{OPR})=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PO}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|}$$

$$=\frac{\vec{c}\cdot(-\vec{a}-\vec{b})}{c\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta_1}}=\frac{-\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}}{c\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta_1}}=\frac{-bc\cos\theta_2-ca\cos\theta_3}{c\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta_1}}\cdots(**)$$

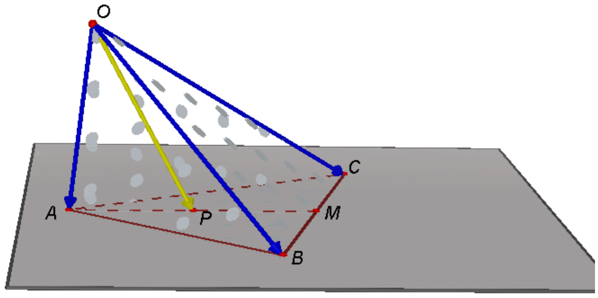
分母の計算は同じですが，分子の計算は，内積を利用した方がずーと簡単です.

「内積」の威力が分かってもらえるでしょうか？　内積の威力は，空間では平面よりずーと顕著です. 余弦定理でも「工夫すれば」距離や角度の余弦 は求まりますが，内積だと「単純計算で」求まります. そして，色々な公式の「見通し」が良くなります. 確かに「本質的には 余弦定理と内積は同じ」です. しかしこの「見通しの良さ」が更なる発展に結びついていきます.

4-5 長さと角度を求める問題

> 四面体OABCがあり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2, |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3, |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=4, \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ である．
> さらに, 辺BCの中点をM, 線分AMの中点をPとする．
> (1) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$の値を求めよ．
> (2) $\cos\angle\mathrm{AOP}$の値を求めよ．

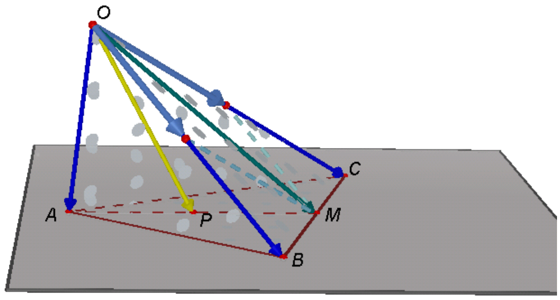
[内積による解答]



$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．仮定より，

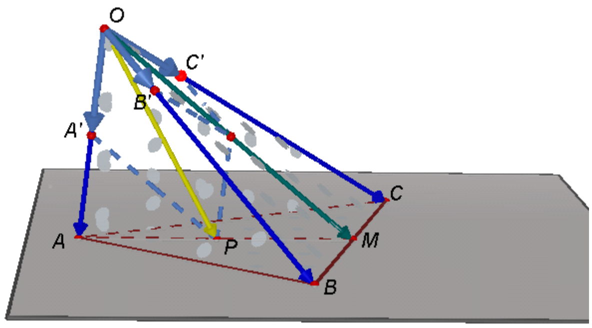
$$\begin{cases} |\vec{a}|=2, & |\vec{b}|=3, & |\vec{c}|=4, \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3, & \vec{b}\cdot\vec{c}=6, & \vec{c}\cdot\vec{a}=4 \end{cases} \cdots①$$

(1) M は線分 BC の中点だから，平面 OBC 上で考えて，



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$$

P は線分 AM の中点だから，平面 OAM 上で考えて，



A' は OA の中点, B', C' はOB, OC を 1:3 に内分する点

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c} \cdots②$$

①，②より，

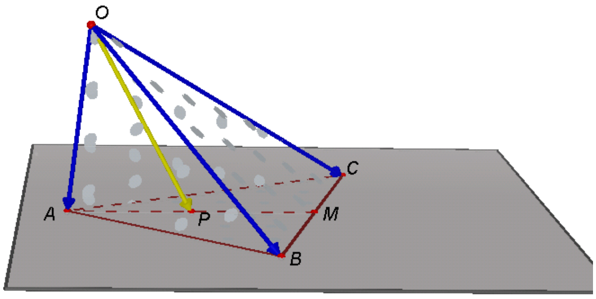
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &=\left|\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right) && \leftarrow |\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a} \\ &=\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{a}+\frac{1}{16}\vec{b}\cdot\vec{b}+\frac{1}{16}\vec{c}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a} && \leftarrow \text{分配法則} \\ &=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{16}|\vec{b}|^2+\frac{1}{16}|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a} && \leftarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \\ &=\frac{1}{4}\cdot 2^2+\frac{1}{16}\cdot 3^2+\frac{1}{16}\cdot 4^2+\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{8}\cdot 6+\frac{1}{4}\cdot 4 \\ &=\frac{81}{16}\end{aligned}$$

よって，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4} \qquad \cdots(ans)$$

(2) ②より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)\\ &=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}\\ &=\frac{1}{2}\cdot2^2+\frac{1}{4}\cdot3+\frac{1}{4}\cdot4\\ &=\frac{15}{4}\end{aligned}$$



よって，

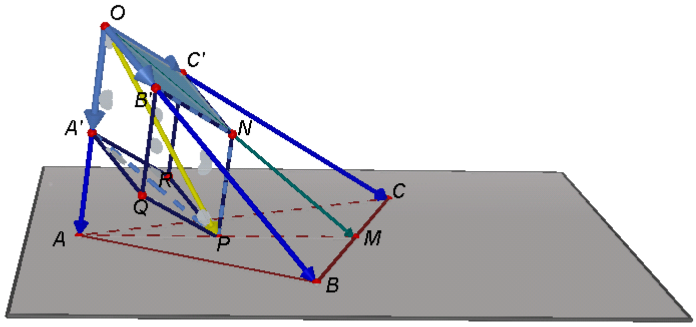
$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AOP} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|} \qquad \leftarrow \text{内積の定義}\\ &=\frac{\frac{15}{4}}{2\times\frac{9}{4}}\\ &=\frac{5}{6} \qquad \cdots(ans)\end{aligned}$$

【参考】[空間余弦定理を使った別解] 同じ問題を「空間余弦定理」を使って解くことが出来ます.

線分 OA の中点を A', 線分 OB, OC を 1:3 に内分する点をそれぞれ B', C' とすると,

②より「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$」だから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$$



平行六面体 OB'NC'－A'QPR に対し,「空間余弦定理」を使うと,

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= \mathrm{OA'}^2+\mathrm{OB'}^2+\mathrm{OC'}^2+2\cdot\mathrm{OA'}\cdot\mathrm{OB'}\cdot\cos 60^\circ+2\cdot\mathrm{OB'}\cdot\mathrm{OC'}\cdot\cos 60^\circ+2\cdot\mathrm{OC'}\cdot\mathrm{OA'}\cdot\cos 60^\circ\\ &=1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+1^2+1\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times 1+1\times 1\\ &=\frac{81}{16}\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\mathrm{OP}=\frac{9}{4} \qquad \cdots(ans)$$

(2)△A'QP に余弦定理を使って,

$$\mathrm{A'P}^2=\mathrm{A'Q}^2+\mathrm{PQ}^2-2\mathrm{A'Q}\cdot\mathrm{PQ}\cos\angle\mathrm{A'QP}=\left(\frac{3}{4}\right)^2+1^2-2\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\cos 120^\circ=\frac{37}{16}$$

△OA'P に余弦定理を使って,

$$\cos\angle\mathrm{A'OP}=\frac{\mathrm{OA'}^2+\mathrm{OP}^2-\mathrm{A'P}^2}{2\mathrm{OA'}\cdot\mathrm{OP}}=\frac{1^2+\frac{81}{16}-\frac{37}{16}}{2\cdot 1\cdot\frac{9}{4}}=\frac{5}{6} \qquad \cdots(ans)$$

繰り返しになりますが,余弦定理でも「工夫すれば」空間内の距離,角度（の余弦）は求まります．しかし,内積を使うと「単純計算で」求まります．是非 内積を使いこなしてください.