

6. 例題

[例 1] 平面の方程式, 点と平面の距離.

$O(0,0,0)$, $A(2,2,1)$, $B(-2,1,2)$, $P(1,1,5)$ とする.

(1) $Q(x, y, z)$ が平面 OAB 上にあるとき, x, y, z の関係式を求めよ.

(2) P から平面 OAB に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

(3) P から平面 OAB までの距離 PH を求めよ.

(1) 平面 OAB の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とおくと,

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overline{OA} \text{ より, } \vec{n} \cdot \overline{OA} = 2a + 2b + c = 0 \\ \vec{n} \perp \overline{OB} \text{ より, } \vec{n} \cdot \overline{OB} = -2a + b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -2a \\ c = 2a \end{cases}$$

ゆえに,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

簡単なものを選んで, 平面 OAB の法線ベクトルの 1 つは,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

$Q(x, y, z)$ が平面 OAB にある必要十分条件は, 「 $\overline{OQ} \perp \vec{n}$ 」だから, 求める条件は,

$$\overline{OQ} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = x - 2y + 2z = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

(2) $H(x, y, z)$ とすると, (1)より,

$$x - 2y + 2z = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\overline{PH} \parallel \vec{n}$ だから,

$$\overline{OH} = \overline{OP} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

②, ③より,

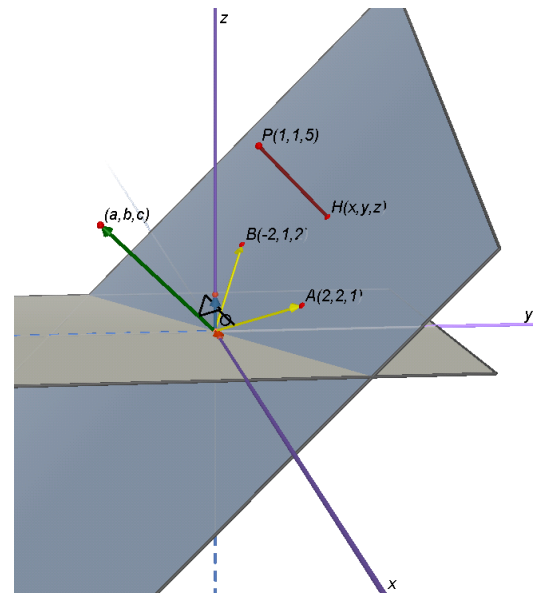
$$(1+t) - 2(-2t+1) + 2(5+2t) = 0 \iff t = -1$$

これを③へ代入して,

$$\overline{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \therefore H(0, 3, 3)$$

(3) (2)より,

$$PH = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2 + (3-5)^2} = 3 \quad \dots (\text{ans})$$



この問題には色々な【別解】があります。参考になるとと思います。

(1)の別解 [共面条件の利用]

H は平面 OAB 上にあるので、

$$\overline{OH} = s\overline{OA} + t\overline{OB} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって、

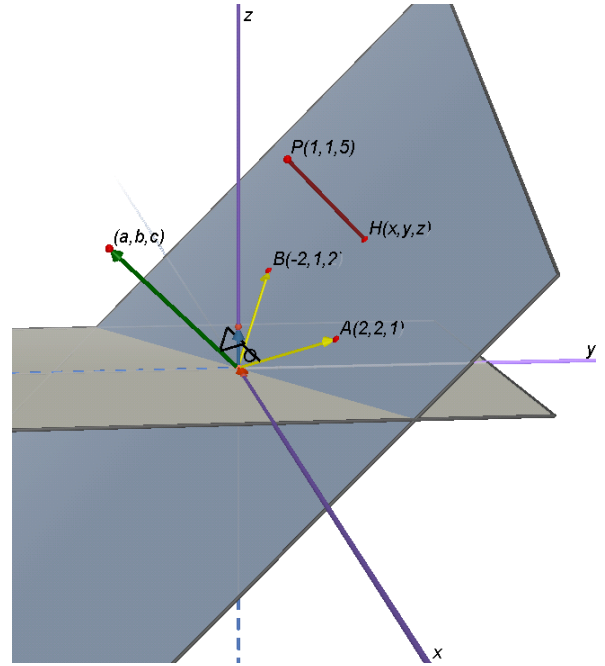
$$\begin{cases} x = 2s - 2t \dots \textcircled{1} \\ y = 2s + t \dots \textcircled{2} \\ z = s + 2t \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

②, ③より、

$$\begin{cases} t = \frac{2z - y}{3} \\ s = \frac{2y - z}{3} \end{cases}$$

これを①へ代入して、

$$x = \frac{4y - 2z}{3} + \frac{2y - 4z}{3} \iff x - 2y + 2z = 0$$



[注] このように、内積を使わなくとも、和・差・実数倍だけからも同じ式が得られます。

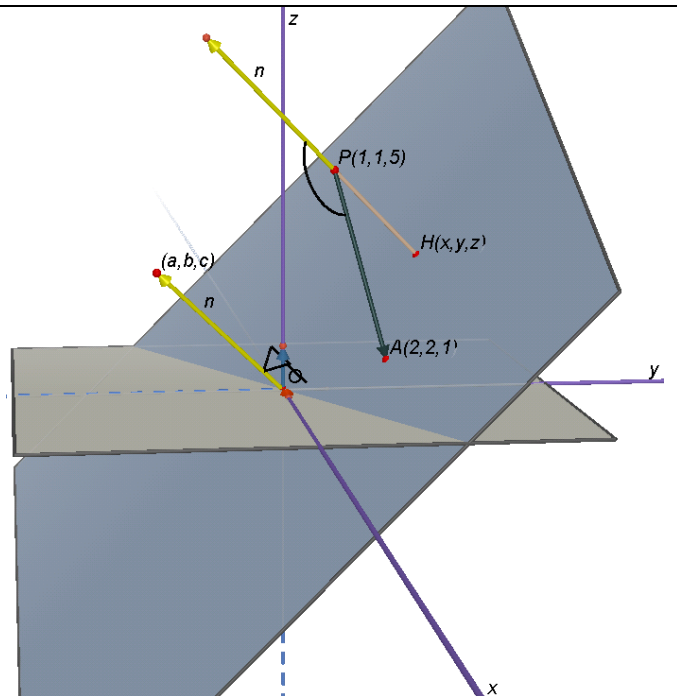
(3)の別解(その 1) [正射影の利用]

内積の図形的定義から、

$$\overline{PA} \cdot \vec{n} = |\overline{PA}| |\vec{n}| \cos \theta = \pm PH \times |\vec{n}|$$

$$\overline{PA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{だから、}$$

$$PH = \frac{|\overline{PA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 \dots (\text{ans})$$



[注] このようにすれば、減点されることは無いと思います。

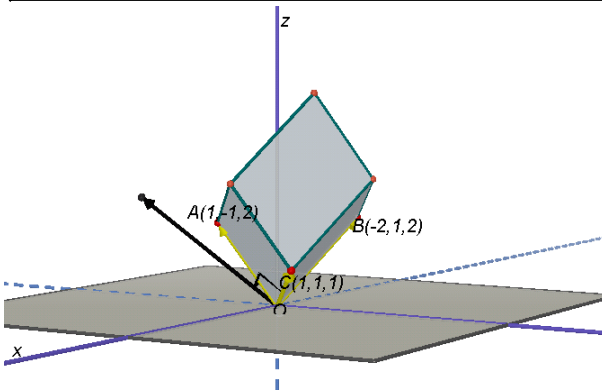
(3)の別解(その2) [点と平面の距離の公式の利用 (使うと減点?)]

P(1,1,5) と $x - 2y + 2z = 0$ との距離だから,

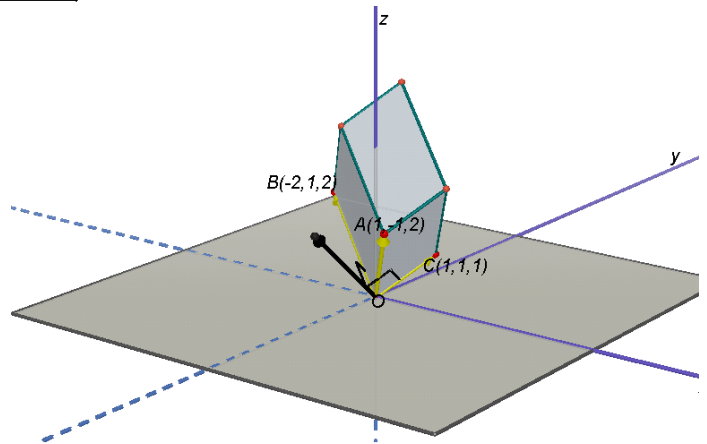
$$PH = \frac{|1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 \quad \dots(ans)$$

[例 2]

ベクトル $\overline{OA}=(1, -1, 2)$, $\overline{OB} = (-2, 1, 2)$, $\overline{OC} = (1, 1, 1)$ によって作られる平行六面体の体積 V を求めよ.



センター方向から見た図



一塁内野席方向から見た図

平面 OBC に垂直なベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とすると,

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overline{OB} \text{ より, } \vec{n} \cdot \overline{OB} = -2a + b + 2c = 0 \\ \vec{n} \perp \overline{OC} \text{ より, } \vec{n} \cdot \overline{OC} = a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \end{cases}$$

ゆえに,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -4a \\ 3a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって, 平面 OBC に垂直なベクトルの 1 つは,

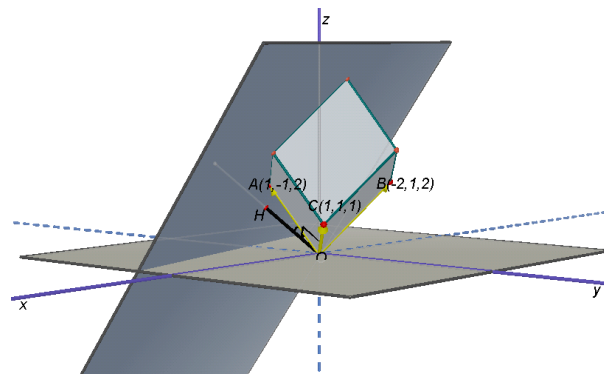
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

C を通り平面 OBC と平行な平面を π , π に O から下ろした垂線の足を H とする. 内積の定義より,

$$\overline{OA} \cdot \vec{n} = |\overline{OA}| |\vec{n}| \cos \theta = \pm OH \times |\vec{n}|$$

$$\overline{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{だから,}$$

$$OH = \frac{|\overline{OA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{11}{\sqrt{26}} \quad \dots \textcircled{2}$$



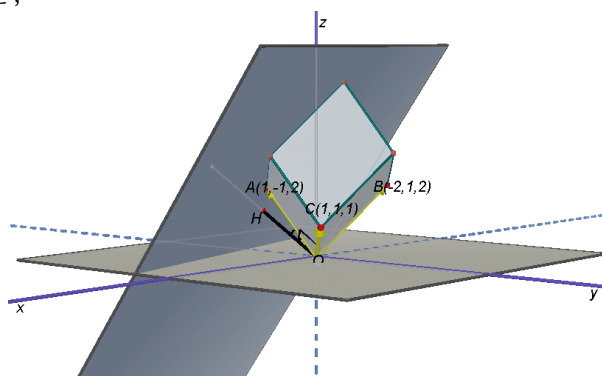
一方、 \overline{OB} と \overline{OC} が張る平行四辺形の面積を S とすると、

$$S = \sqrt{|\overline{OB}|^2 \times |\overline{OC}|^2 - (\overline{OB} \cdot \overline{OC})^2}$$

$$= \sqrt{9 \times 3 - 1^2} = \sqrt{26} \quad \dots \textcircled{3}$$

②, ③より、求める体積は

$$V = OH \times S = \frac{11}{\sqrt{26}} \times \sqrt{26} = 11 \quad \dots (\text{ans})$$



[部分的別解] (点と平面の距離の公式の利用)

平面 OBC 上の点を $P(x, y, z)$ とすると、 $\vec{n} \perp \overline{OP}$ だから、

$$\vec{n} \cdot \overline{OP} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x - 4y + 3z = 0$$

よって、 $A(1, -1, 2)$ とこの平面との距離を h とすると、

$$h = \frac{|1 - 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{11}{\sqrt{26}} \quad (\text{以下略})$$