2.空間ベクトルの成分

2.1 定義

O を原点とする座標系が与えられたとき，x , y , z 軸正方向の単位ベクトル　(長さが 1 のベクトル)　をそれぞれ，$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ とします．(このようなベクトル $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ を基本ベクトルと言います)．空間内の任意のベクトル $\vec{a}$ が与えられたとき，

$$\vec{a} = a_1\,\overrightarrow{e_1} + a_2\,\overrightarrow{e_2} + a_3\,\overrightarrow{e_3} \cdots (*)$$

の形で一通りに表せます．そして「a_1 を $\vec{a}$ の x 成分」，「a_2 を y 成分」，「a_3 を z 成分」と定めます．

また，(∗)を

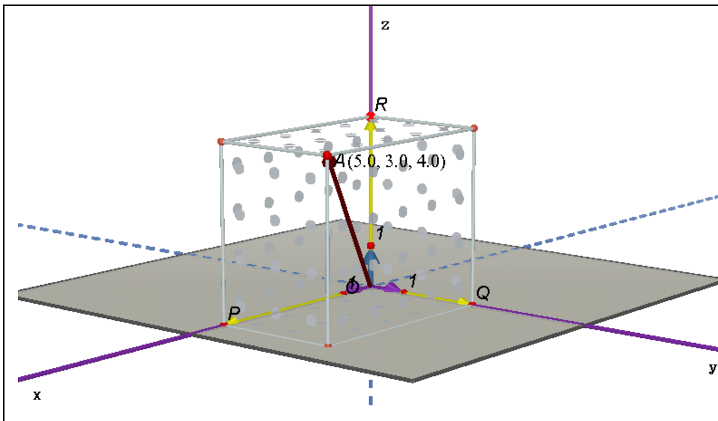
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

のように省略して書くこともあります．

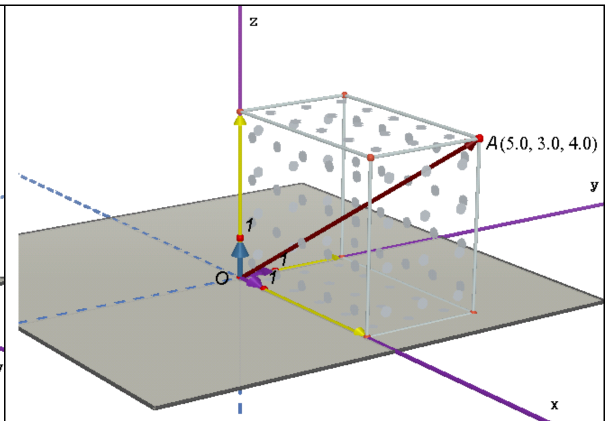
例えば，下図のように A(5,3,4) のとき，(　A を通り x 軸に垂直な平面と x 軸の交点を P，y 軸に垂直な平面と y 軸の交点を Q，z 軸に垂直な平面と z 軸の交点を R とすると，)

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = 5\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3} \cdots (**)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の「x 成分は 5」，「y 成分は 3」，「z 成分は 4」です．
また，(∗∗)を省略して，「$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (5,3,4)$」と書くことも出来ます．



[センター方向から見た図]



[一塁側内野席から見た図]

【注】上の二つの図は，どちらも同じベクトルを違う視点から見たものであり，数学のソフトでは，右図の方が普通です．
また，図の下にあるコメントは，原点をホームベースと見て，野球場に喩えたときの視点です．

上の例から分かるように，
ベクトル $\vec{a}$ の x 成分，　y 成分，z 成分はそれぞれ

　　　始点から終点までの x 軸正方向への移動量，
　　　始点から終点までの y 軸正方向への移動量
　　　始点から終点までの z 軸正方向への移動量

を表すことが分かります．(ただし「移動の方向」も考え，負方向への移動には，負の数を使います)

また，

　一般には，$\vec{a}$ の成分は，始点や終点の座標とは一致しない．（点 A や B の成分とは異なります）．

しかし，始点が原点のときは，$\vec{a}$ の成分は，終点の座標と一致します．

すなわち，

$\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$ のとき，「$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$」と書けるから， $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,a_2,a_3)$

一般に，$\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3),\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$ のときは，A から B への移動量は，x 軸正方向には，

$$(b_1-a_1)\vec{e_1}$$

y 軸，z 軸方向も同様だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1)\vec{e_1}+(b_2-a_2)\vec{e_2}+(b_3-a_3)\vec{e_3}$$

略して書くと，「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$」となります．　すなわち，

$\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3),\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$ のとき，「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1)\vec{e_1}+(b_2-a_2)\vec{e_2}+(b_3-a_3)\vec{e_3}$」と書けるから， $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$

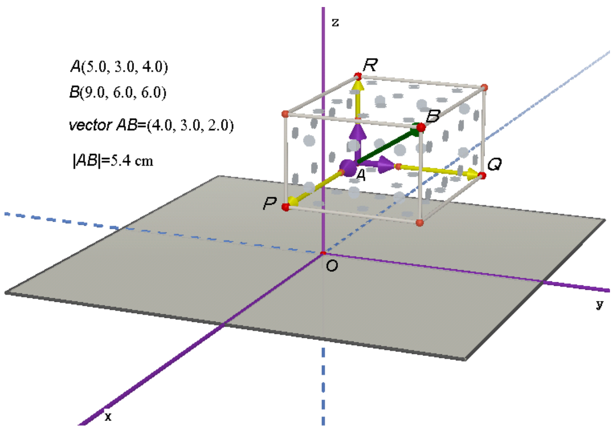
例えば，A(5,3,4), B(9,6,6) のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(9-5,6-3,6-4)=(4,3,2)$$

となります．これは，A から B までの移動は，

　x 軸方向に 4，y 軸方向に 3，z 軸方向に 2

であることを表します．



2-1-2. Cabri3D による検証.

(a) 原点が始点の場合.

A を drag して下さい．　[coordinates1.html]

(b) 始点が原点とは限らない場合.

A,B を drag して下さい．　[coordinates2.html]

点を上下に移動するには「Shift キー」を押したままで drag します．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．

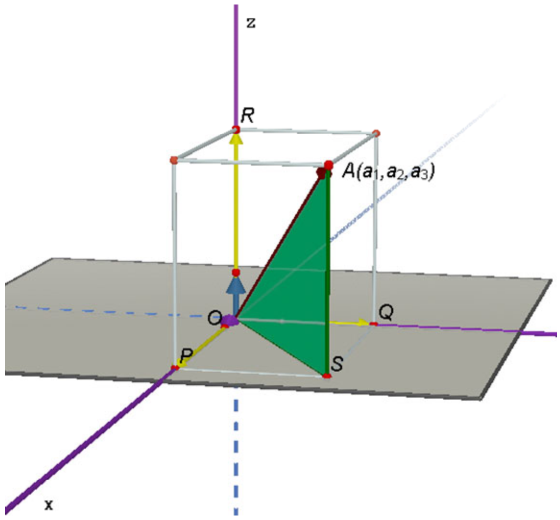
2-2. ベクトルの大きさ

右図で，三角形 OAB に三平方の定理を使うと，

$$
\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| &= \sqrt{\mathrm{OS}^2+\mathrm{SA}^2} \\
&= \sqrt{\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2} \\
&= \sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}
\end{aligned}
$$

となる．すなわち，

$$
\boxed{\begin{aligned} &\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\text{のとき，} \\ &\qquad |\vec{a}\,|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2} \end{aligned}}
$$



2-3. 和,差,実数倍の成分

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ は，「$\vec{a}=a_1\,\overrightarrow{e_1}+a_2\,\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$，　$\vec{b}=b_1\,\overrightarrow{e_1}+b_2\,\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3}$」の省略だから，

$$
\begin{cases}
\vec{a}+\vec{b}=(a_1\,\overrightarrow{e_1}+a_2\,\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3})+(b_1\,\overrightarrow{e_1}+b_2\,\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3})=(a_1+b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2+b_2)\overrightarrow{e_2}+(a_3+b_3)\overrightarrow{e_3} \\
\qquad =(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \\
\vec{a}-\vec{b}=(a_1\,\overrightarrow{e_1}+a_2\,\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3})-(b_1\,\overrightarrow{e_1}+b_2\,\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3})=(a_1-b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2-b_2)\overrightarrow{e_2}+(a_3-b_3)\overrightarrow{e_3} \\
\qquad =(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3) \\
\quad k\vec{a}=k(a_1\,\overrightarrow{e_1}+a_2\,\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3})=(ka_1)\overrightarrow{e_1}+(ka_2)\overrightarrow{e_2} \\
\qquad =(ka_1,ka_2,ka_3)
\end{cases}
$$

すなわち，省略形で表すと，

$$
\boxed{\begin{cases}
(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3) &= (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \\
(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3) &= (a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3) \\
k(a_1,a_2,a_3) &= (ka_1,ka_2,ka_3)
\end{cases}}
$$