# 3. 共面条件

## 3-1. 内分・外分の公式

空間ベクトルでも，内分・外分の公式は，平面と全く同じです．なぜなら，

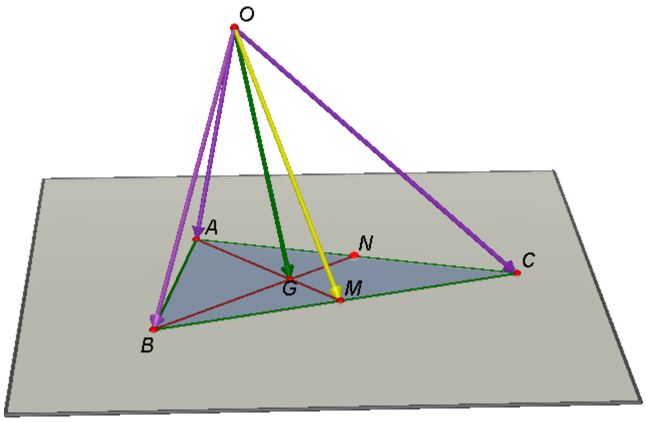
線分 AB を $m:n$ に分ける点の位置ベクトルを考える際は，平面 OAB 上で考える

からです．

[例]三角形 ABC の重心 G の位置ベクトル

三角形 ABC の重心を G，線分 BC, AC の中点をそれぞれ M, N とします．「$\mathrm{AG}:\mathrm{GM}=2:1$」だから，平面 OAM 上で考えて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdots①$$




次に，平面 OBC 上で考えて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots②$$

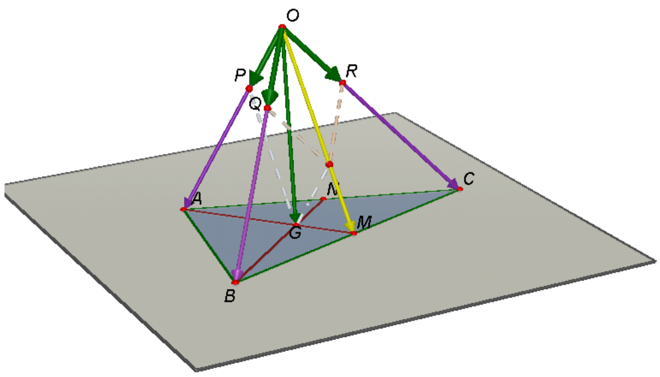
①，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

[注]　線分 OA,OB,OC を 1:2 に内分する点を，それぞれ P,Q,R とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

となることを表します．




### 3-1-1. Cabri3D による検証

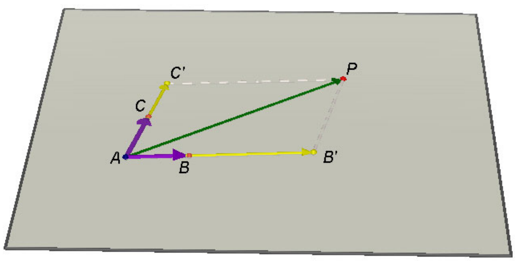
O,A,B,C を動かしてください．点を上下に移動するには「Shift キー」を押したままで Drag します．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．

center of gravity.html

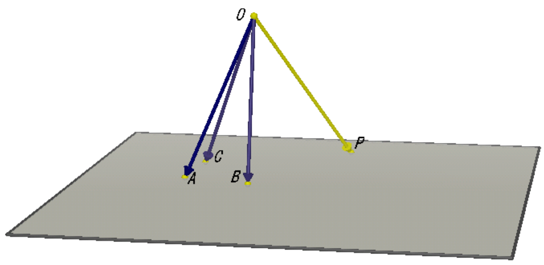
## 3-2. 共面条件

| | |
|---|---|
| Pが平面ABC上にある | $\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $(s, t$ は任意の実数$)$ |
| | $\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s\ (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + t\ (\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$ |
| | $\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1 - s - t)\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ |
| | $\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$ |

（ただし O は，平面 ABC 上に無い任意の点）




$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$




$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1 - s - t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

4 つの表現は全て同値です．2 行目以外は全て大切です．また「$1 - s - t = \alpha, s = \beta, t = \gamma$」とおくと，「$\alpha + \beta + \gamma = 1$」ですから，3 行目から 4 行目にはすぐ移れます．よって本質的には，「始点が平面上にあるとき」と「始点が平面上に無いとき」の二つの場合になります．この公式も，図と合わせて理解しておく事が大切です．

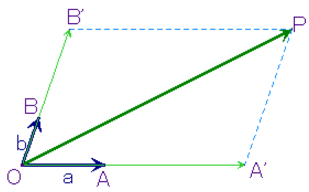
## 4-1. 始点が平面 ABC 上にあるとき

平面上に互いに平行でなく，かつ$\vec{0}$でない二つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$がある時，平面上の任意の点 P に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (\ s,t \text{ は実数})$$

の形にただ一通りに表せます．

【注】P を通り直線 OB に平行な直線と OA の交点を A’，　P を通り直線 OA に平行な直線と OB の交点を B’とするとき，「$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」と一通りに書け，かつ「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$」となることから分かります．



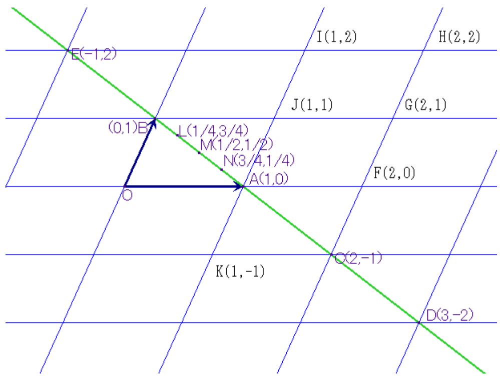
$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ , $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

このとき，$(s,t)$の組は，

A(1,0), B(0,1) としたときの座標のようなもの（斜交座標）

になります．

以上のことは，平面ベクトルと全く同様です．つまりこの場合は「空間内の平面」であることは意識しません．いわば，高層ビルの 50 階のフロアーを歩いているようなものです．



$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で表される点 P に $(s,t)$ を対応させる

### 4- 1 -1. Cabri3D による検証

P,A,B,C を動かして，$(s,t)$の変化を見てください．点を上下に移動するには「**Shift** キー」を押したままで **Drag** します．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．

OP=sOA+tOB.html

## 4-2. 始点 O が平面 ABC 外にあるとき

P が平面 ABC 上にある条件は,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\Longleftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(\alpha+\beta+\gamma=1)}$$

です．まず例で確かめてみます． A', D, E はそれぞれ線分 OA, BA, CA を $1:3$ に内分する点とします．このとき A'D//OB かつ A'E//OC となります．従って,

P=D のとき,

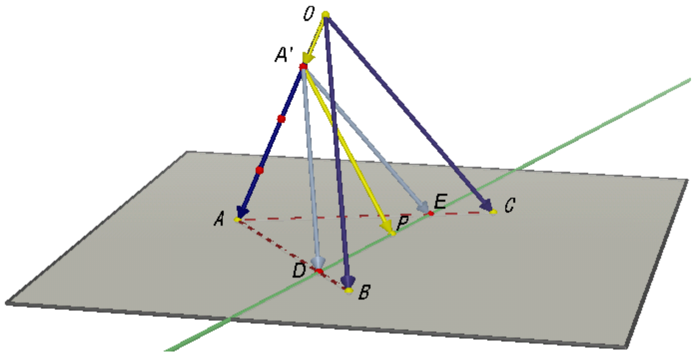
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'D}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\to \mathrm{D}(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{D}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0\right)$$

P=E のとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'E}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\to \mathrm{E}(\alpha,\beta,\gamma)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{4},0,\frac{3}{4}\right)$$




$\left[\alpha=\frac{1}{4}\text{ のとき}\right]$

このように，D, E に対しては「$\alpha+\beta+\gamma=1$」が成り立っています．実は，**P が直線 DE 上の任意の点のときも成り立ちます**．なぜなら，P が直線 DE 上にあるとき， 平面 ADE 上で考えて,

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=u\overrightarrow{\mathrm{A'D}}+(1-u)\overrightarrow{\mathrm{A'E}}=\left(\frac{3}{4}u\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}(1-u)\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

したがって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{3}{4}u\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}(1-u)\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots(*)$$

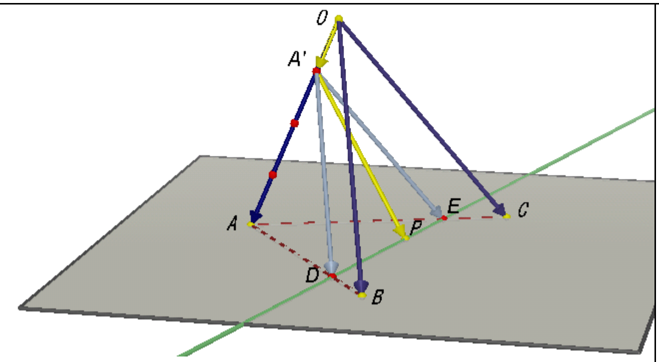
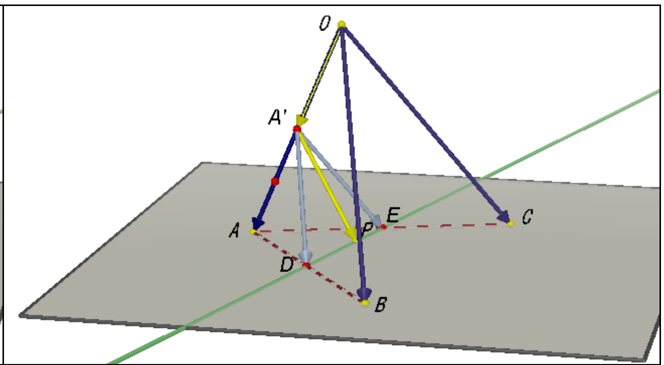
ゆえに,

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}(1-u)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\cdots(**)$$

さらに詳しく見てみましょう．前項の(*)より，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\left(\beta+\gamma=\frac{3}{4}\right)$で表される点 P の軌跡は，上図の直線 DE です．(ただし，A’, D, E はそれぞれ線分 OA, BA, CA を $1:3$ に内分する点)．

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\left(\beta+\gamma=\frac{1}{2}\right)$で表される点 P の軌跡は，下図の直線 DE です．(ただし A’,D,E はそれぞれ 線分 OA,AB,AC の中点)

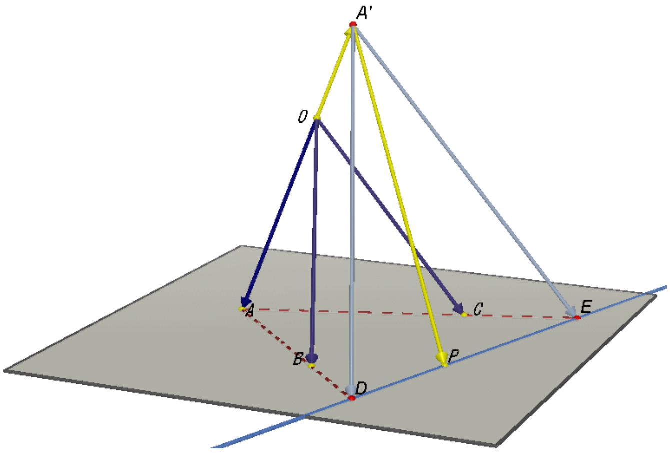
| | |
|---|---|
|  |  |
| $\left[\alpha=\frac{1}{4}\text{のとき}\right]$ | $\left[\alpha=\frac{1}{2}\text{のとき}\right]$ |

同様に，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\left(\beta+\gamma=\frac{3}{2}\right)$$

で表される点 P の軌跡は，図の直線 DE です．

(ただし A’,D,E はそれぞれ 線分 OA,BA,CA を 1:3 に外分する点)




$\left[\alpha=-\frac{1}{2}\text{のとき}\right]$

以上から，P が平面 ABC 上にある条件は，

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\Longleftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(\alpha+\beta+\gamma=1)}$$

であることが納得できると思いますが，如何でしょうか？

### 4-2-1. Cabri3D による検証.

点を上下に移動するには「**Shift** キー」を押したままで **Drag** します．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します.

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \left(\beta + \gamma = \frac{3}{4}\right)$ で表される点 P の軌跡です．P を Drag してください.

s=quarter.html

(b) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (\beta + \gamma = 1 - \alpha)$ で表される点 P の軌跡です．先の例では「$\alpha = \frac{1}{4}$」で固定でしたが，今度は点 A'も Drag できます．$\alpha$ の値を色々代えることにより，P の描く軌跡がどう変化するか見てください.

s=free.html

(c) 最後は，補助線など一切なしで，点 P を平面 ABC 上で動かしてください．そして，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表したときの，$(\alpha, \beta, \gamma)$ の値の変化を見てください.

s+t+u=1.html

## 4-3. 斜交座標

平面では，「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」で表される点 P に対し「実数の組 $(s,t)$」を対応させると，「$(s,t)$ は $\mathrm{A}(1,0),\mathrm{B}(0,1)$ としたときの座標のようなもの」になります．これを($\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基底にした)斜交座標といいます．

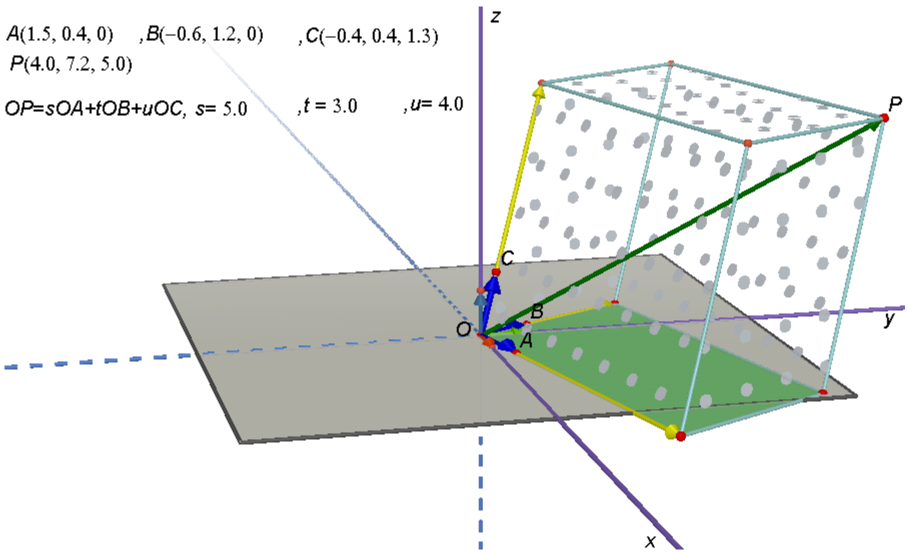
そして「 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$」(単位直交ベクトル)になっているときは，斜交座標は直交座標と同じになります．(よって「直交座標」は「斜交座標」の特別なものとして，「斜交座標」に含められます．ちょうど正三角形が二等辺三角形に含まれるようなものです.)

これと同様に，空間でも「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$」で表される点 P に対し「実数の組 $(s,t,u)$」を対応させると，「$(s,t,u)$ は $\mathrm{A}(1,0,0),\mathrm{B}(0,1,0),\mathrm{C}(0,0,1)$ としたときの座標のようなもの」になります．これを($\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を基底にした)斜交座標といいます．

そして「 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$」(単位直交ベクトル)になっているときは，斜交座標は直交座標と同じになります．

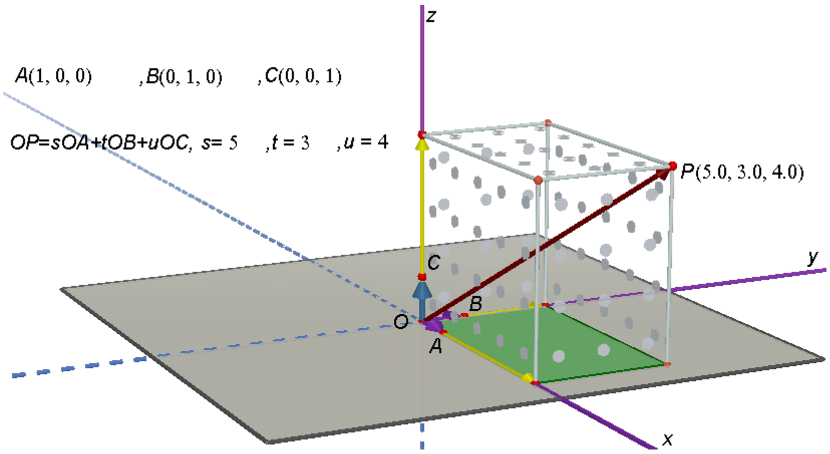
[例 1 (斜交座標)]

下の例では, P の成分は(4.0, 7.2, 5.0) ですが,「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ (s,t,u)=(5,3,4)$」ですから，P の斜交座標は(5,3,4) で，二つは一致しません．



[例 2 (直交座標)]

下の例では，A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)です．このとき，P の成分は(5,3,4) で「$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}, (s,t,u) = (5,3,4)$」より，P の斜交座標も(5,3,4) で，二つは一致します．




## 4-3-1. Cabri3D による検証

($a$) [斜交座標] P,A,B,C を動かして，$(s,t,u)$ の変化を見てください．

[shakou-zahyou.html](shakou-zahyou.html)

($b$) [直交座標] P を動かして，$(s,t,u)$ の変化を見てください．

[chokkou-zahyou.html](chokkou-zahyou.html)

点を上下に移動するには「Shift キー」を押したままで Drag します．また視点を変えるには，マウスの右ボタンを押したままで「ぐりぐり」します．