4.例題演習

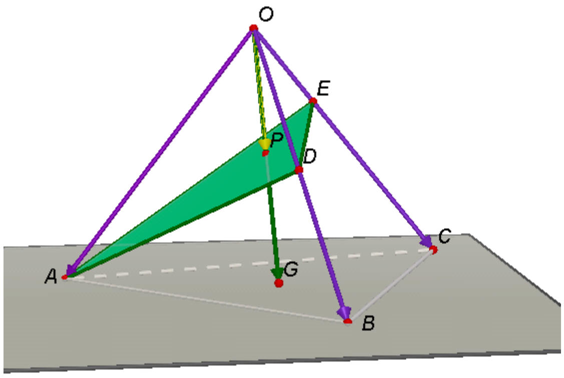
[例 1]直線と平面の交点

> 四面体OABCがあり，Dは辺OBの中点, Eは辺OCを1:2に内分する点とする.
> また，三角形ABCの重心をG,平面ADEと直線OGの交点をPとする.
> (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ.
> (2) 三角形OAB と直線CPの交点を Q とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく.

(1)　D は OB の中点，OE:EC=1:2 , G は△ABC の重心だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$



P は直線 OG 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}\cdots①$$

P は平面 ADE 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+u\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\frac{u}{3}\vec{c}\quad (s+t+u=1)\quad\cdots②$$

①，②より,

$$\begin{cases}\dfrac{k}{3}=s\cdots③\\ \dfrac{k}{3}=\dfrac{t}{2}\cdots④\\ \dfrac{k}{3}=\dfrac{u}{3}\cdots⑤\\ s+t+u=1\cdots⑥\end{cases}\qquad \therefore\frac{k}{3}+\frac{2}{3}k+k=1\qquad \therefore k=\frac{1}{2}$$

①へ代入して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\cdots(ans)$$

(2)　Q は直線 CP 上にあるので，

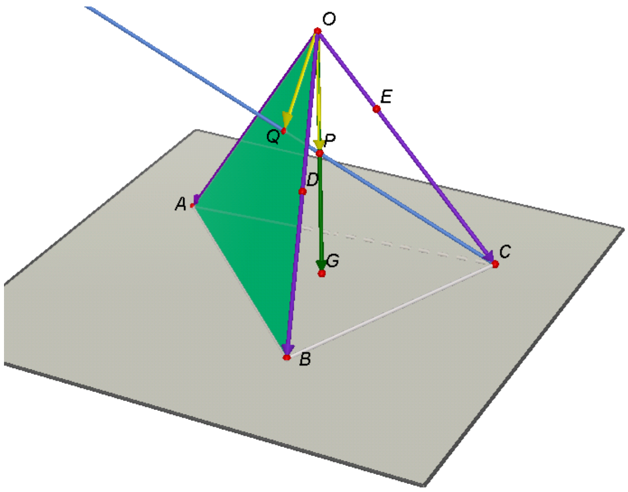
$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{CP}}\Longleftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\Longleftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\quad(t\text{ は実数})$$

とおける．よって(1)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{c}+t\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)=\frac{t}{6}\vec{a}+\frac{t}{6}\vec{b}+\frac{6-5t}{6}\vec{c}\cdots⑦$$

一方，Q は平面 OAB 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}\quad(\alpha,\beta\text{ は実数})$$



よって，⑦より，

$$\frac{6-5t}{6}=0\Longleftrightarrow t=\frac{6}{5}$$

これを⑦へ代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\cdots(ans)$$

[注] (1)では「始点が平面外のとき」，(2)では「始点が平面上のとき」のそれぞれ共面条件を使いました．

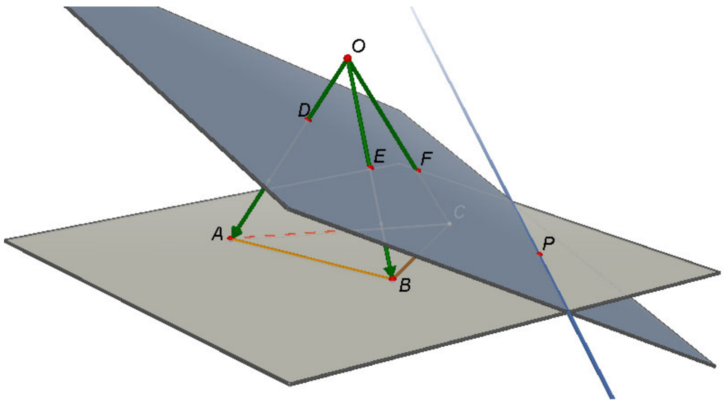
[例 2]　平面と平面の交わり

> 四面体OABCがあり，Dは辺OAを 1:2 に内分する点，Eは辺OBの中点, Fは辺OCを 2:1 に内分する点とする．
> また，平面DEFと平面ABCの交線 l 上の点をPとする．
> (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくとき，x と y の関係式を求めよ．
> (2) 平面ABC上で l は，どのような直線になるか？　図示せよ．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．仮定より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{2}{3}\vec{c}$$

(1)



P は平面 DEF 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\overrightarrow{\mathrm{OE}} + u\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \frac{2u}{3}\vec{c} \quad (s+t+u=1) \cdots ①$$

「$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = x(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + y(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-x-y)\vec{a} + x\,\vec{b} + y\,\vec{c} \cdots ②$$

①,②より,

$$\begin{cases} 1-x-y = \dfrac{s}{3} \\ x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{2u}{3} \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} s = 3-3x-3y \\ t = 2x \\ u = \dfrac{3y}{2} \end{cases} \cdots ③$$

「$s+t+u=1$」へ代入して,

$$2x + 3y = 4 \cdots (ans)$$

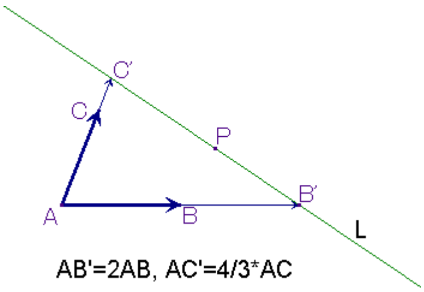
⑵「$2x+3y=4$」の両辺を 4 で割って,

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y=1\cdots④$$

一方,

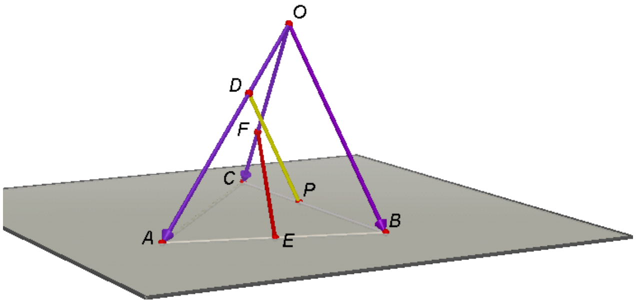
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}x\left(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\frac{3}{4}y\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{1}{2}x\,\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+\frac{3}{4}y\,\overrightarrow{\mathrm{AC'}}\quad\left(\text{ただし, }\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

ゆえに④より，P は直線 B’C’上を動く．（下図）

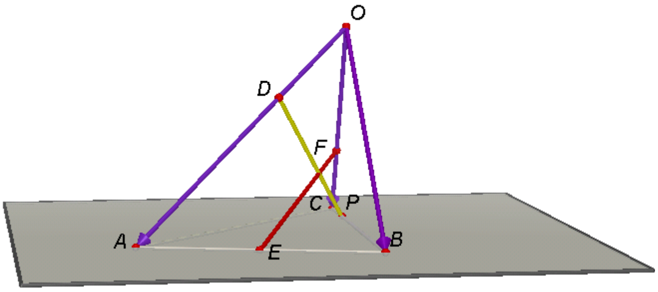


[例 3]直線と直線の交点

四面体OABCがあり，Dは辺OAを 1:2 に内分する点，Eは辺ABの中点， Fは辺OCを 2:1 に内分する点とする． Pを辺BC上の点とする． 直線DPと直線EFが交わるとき, BP:PCの値を求めよ．



[交わってないとき]



[交わっているとき]

交わるのは，P が平面 OEF 上にある時ですが，まずは，共線条件だけでやってみます．

[解 1] 「共線条件の利用」

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおきます．仮定より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2}{3}\vec{c}$$

P は直線 BC 上にあるので「$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t),\quad 0<t<1$」とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\ \vec{b}+t\,\vec{c}$$

直線 PD と EF が交わったとき，その交点を R とします．R は直線 PD 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}(1-s)\vec{a}+s\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}=\frac{1-s}{3}\vec{a}+s(1-t)\,\vec{b}+st\,\vec{c}\cdots①$$

R は直線 EF 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+u\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-u)\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+u\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right)=\frac{1-u}{2}\vec{a}+\frac{1-u}{2}\vec{b}+\frac{2u}{3}\vec{c}\cdots②$$

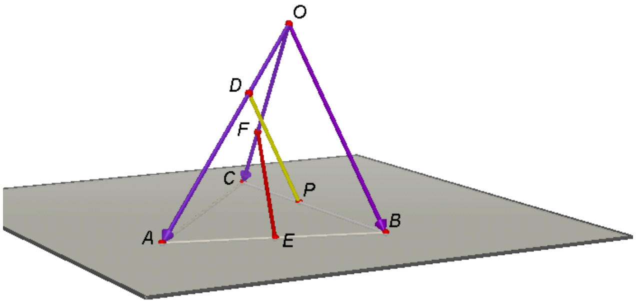
①，②より，

$$\begin{cases}\dfrac{1-s}{3}=\dfrac{1-u}{2}\cdots③\\ s(1-t)=\dfrac{1-u}{2}\cdots④\\ st=\dfrac{2u}{3}\cdots⑤\end{cases}\qquad\qquad \therefore s=\frac{5}{8},\ u=\frac{3}{4},\ t=\frac{4}{5}$$

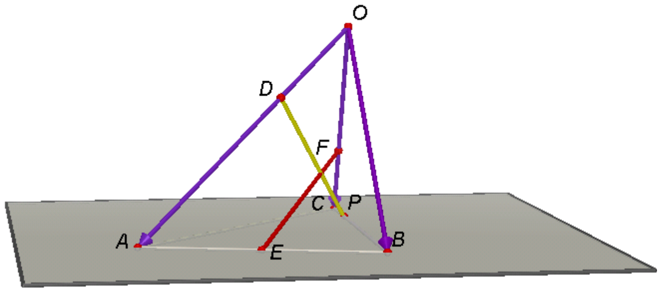
よって，

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)=\frac{4}{5}:\frac{1}{5}=4:1\cdots(ans)$$

[解 2]「共面条件の利用」



[交わってないとき]



[交わっているとき]

「交わっているのは，P が平面 DEF 上にある時です.」

P は直線 BC 上より，「$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)$」とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\ \vec{b}+t\,\vec{c}\cdots①$$

交わっているとき，P は平面 DEF 上にもあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\gamma\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\alpha\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right)+\beta\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\gamma\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right)=\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}\right)\vec{a}+\frac{\beta}{2}\vec{b}+\frac{2\gamma}{3}\vec{c}\cdots②$$

(ただし $\alpha+\beta+\gamma=1$)

①,②より，

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{2}=0\\ \dfrac{\beta}{2}=1-t\\ \dfrac{2\gamma}{3}=t\\ \alpha+\beta+\gamma=1\end{cases}\qquad\therefore t=\frac{4}{5}$$

よって，

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)=\frac{4}{5}:\frac{1}{5}=4:1\cdots(ans)$$

この問では，共面条件を使ったほうが少し楽でした.