目で見る極限・微分の初歩

‐イメージをつかもう‐

生越（おごせ） 茂樹（しげき）

平成 21 年 7 月 23 日

目 次

第1章　極限　近似(大雑把に考えてみよう)

1.1　数列の極限

極限の問題で最も基本的なことは**大雑把に近似して考える**，すなわち**主要部分を見つける**ことです.「$\infty-\infty$ の不定形は $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形に直す」,「$\frac{\infty}{\infty}$ の不定形は最も大きい項で分母 · 分子を割る」,「無理関数は逆有理化する」などのテクニックを覚えているだけでは使いこなせません.

例 1　数列の極限

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+4}{3n^2-3n+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n}$

(1) 分母 · 分子を n^2 で割って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+4}{3n^2-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{3-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}$$

(2) 分母 · 分子を n で割って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

(3) 逆有理化して

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(4)$5^n<2^n+5^n<5^n+5^n=2\cdot5^n$ だから

$$\sqrt[n]{5^n}<\sqrt[n]{2^n+5^n}<\sqrt[n]{2\cdot5^n}\iff 5<\sqrt[n]{2^n+5^n}<\sqrt[n]{2}\cdot5$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ だから, ハサミウチより

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n}=5$$

例 1　数列の極限

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+4}{3n^2-3n+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n}$

今度はこれを「大雑把に」考えてみよう.

(1) n^2 は n に比べると $n\to\infty$ のとき，遥かに大きくなるので,「分子の**主要部分**は $2n^2$」．「分母の**主要部分**は $3n^2$」. よって n が非常に大きいとき

$$\frac{2n^2+n+4}{3n^2-3n+1}\quad\frac{2n^2}{3n^2}=\frac{2}{3}$$

(2)　n^2 は n に比べると $n\to\infty$ のとき，遥かに大きくなるので，n が非常に大きいとき

$$\frac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\quad\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{n}{n+n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

(3)「$\sqrt{n^2+3n}=\sqrt{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$」. n が非常に大きいとき, $n+\frac{3}{2}$ に比べると $\frac{9}{4}$ は 無視できるので

$$\sqrt{n^2+3n}=\sqrt{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}\quad\sqrt{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2}=\left|n+\frac{3}{2}\right|=n+\frac{3}{2}$$

よって n が非常に大きいとき

$$\sqrt{n^2+3n}-n=\left(n+\frac{3}{2}\right)-n=\frac{3}{2}$$

(4)n が非常に大きいとき 2^n は 5^n に**比べると**無視できるので

$$\sqrt[n]{2^n+5^n}\quad\sqrt[n]{5^n}=5$$

このように**主要部分を見つけて大雑把に考えること**が極限では非常に大切です．それによってイメージが持てる (森全体を見渡すことができる) からです．細かい計算技術はイメージと一緒に身に着けていきましょう．イメージを持ちながら考えていると 自然にいろいろ疑問も浮かんできます．例えば**「(2) では $\sqrt{n^2+3n}\quad\sqrt{n^2}=n$ と近似」したのに 何故「(3) では $\sqrt{n^2+3n}\quad\sqrt{(n+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}}\quad n+\frac{3}{2}$ と近似」したのでしょう？**

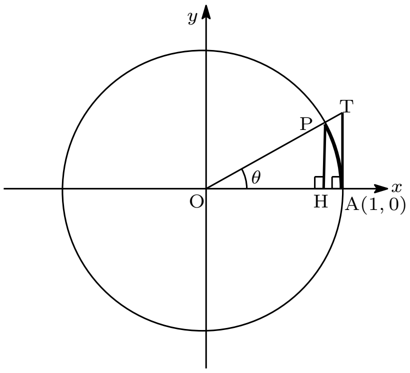
これは分母と関係しています．(2) では分母の主要部分が「n と同程度の無限大」でした．したがって $n+\frac{3}{2}$ の $\frac{3}{2}$ は無視できました．ところが (3) では (敢えて言うならば) 分母は 1 ですから, $\frac{3}{2}$ を無視するわけにはいきません.「どのくらいまで細かく近似すればよいのか？」は単独には決まりません．他の項との関係によって決まります．(これについては第 2 章で細かく扱います.)

1.2　三角関数の極限と近似

三角関数の極限

① $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ $\cdots$(基本公式)

② $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$ $\cdots$(準公式)



【証明】単位円上に，中心角が θ (単位はラジアンで，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$) の扇形 OAP を考え, P から x 軸に下ろした垂線の足を H，A における接線と半直線 OP の交点を T とすると,

$$\overline{\mathrm{PH}}<\text{弧}\,\mathrm{AP}<\overline{\mathrm{AT}}$$

すなわち

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta \Longleftrightarrow \sin\theta<\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

各辺を θ で割って整理すると

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

$\theta<0$ の場合も $-\theta=h$ とおいて上の関係が成り立つ. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1$ だから, ハサミウチより

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

② の方は ① を使って簡単に証明できます.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos\theta)}=\frac{1}{2}$$

$\cdots$(証明終)

①,② は θ　0(非常に 0 に近い) のとき，次の近似ができることを表しています.

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\quad 1 \Longleftrightarrow \sin\theta\quad\theta \\[2ex] \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\quad\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 1-\cos\theta\quad\dfrac{1}{2}\theta^2 \Longleftrightarrow \cos\theta\quad 1-\dfrac{1}{2}\theta^2\end{cases}$$

例で確かめてみましょう. (i) $\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき

$$\begin{cases}\sin\theta=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=0.5 \\ \theta=\frac{\pi}{6}=\frac{3.1415926\cdots}{6}=0.523598\cdots \\ \frac{\sin\theta}{\theta}\quad\frac{0.5}{0.52359}\quad 0.95493\end{cases}\qquad\begin{cases}1-\cos\theta=1-\cos\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1-0.866025\cdots=0.133974\cdots \\ \theta^2=\left(\frac{3.1415926\cdots}{6}\right)^2=(0.523598\cdots)^2=0.27415486\cdots \\ \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\quad\frac{0.133974}{0.27415486}\quad 0.4886821\end{cases}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ でもかなり近いですが，θ がもっと小さいとさらに近くなります．(ii)$\theta = \frac{\pi}{12}$のとき

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin\frac{\pi}{12} = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0.258819\cdots \\ \theta = \frac{\pi}{12} = \frac{3.1415926\cdots}{12} = 0.261799\cdots \\ \frac{\sin\theta}{\theta} \quad \frac{0.258819}{0.261799} \quad 0.988615 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\cos\theta = 1-\cos\frac{\pi}{12} = 1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1.7320508\cdots}{2} = 0.0340741\cdots \\ \theta^2 = \left(\frac{3.1415926\cdots}{12}\right)^2 = (0.261799\cdots)^2 = 0.0685387\cdots \\ \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \quad \frac{0.0340741}{0.0685387} \quad 0.497152 \end{cases}$$

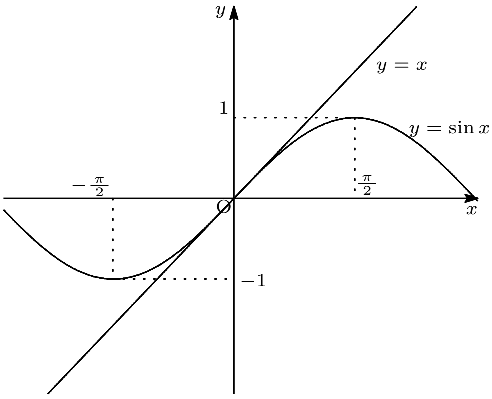
以上から次のことが分かります.

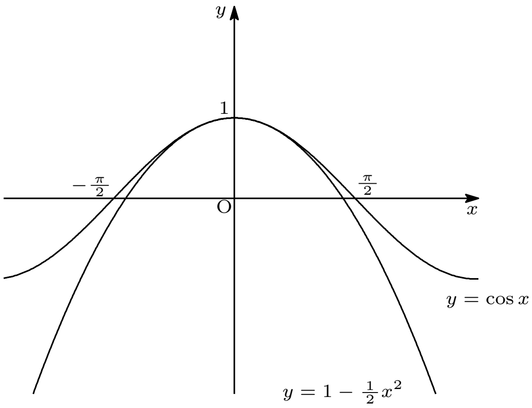
三角関数と近似

θ が非常に小さいとき

$$① \ \sin\theta \quad \theta$$

$$② \cos\theta \quad 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$





実際 $y = \sin x$, $y = x$ のグラフは原点において接し，$y = \cos x$ と $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ のグラフも非常に「くっついている」ことが分かる．また $\boldsymbol{y = 1 - \frac{1}{2}x^2}$ **は，**$\boldsymbol{y = \cos x}$ **の 接線ではない． しかし，実は点** $\boldsymbol{(0, 1)}$ **の近くでは もっと** $\boldsymbol{y = \cos x}$ **を近似した関数になっている．**このような放物線による近似を 「2 次近似」 と言う．(一方 接線による近似は「1 次近似」という.) これは 第 2 章で詳しく扱う.

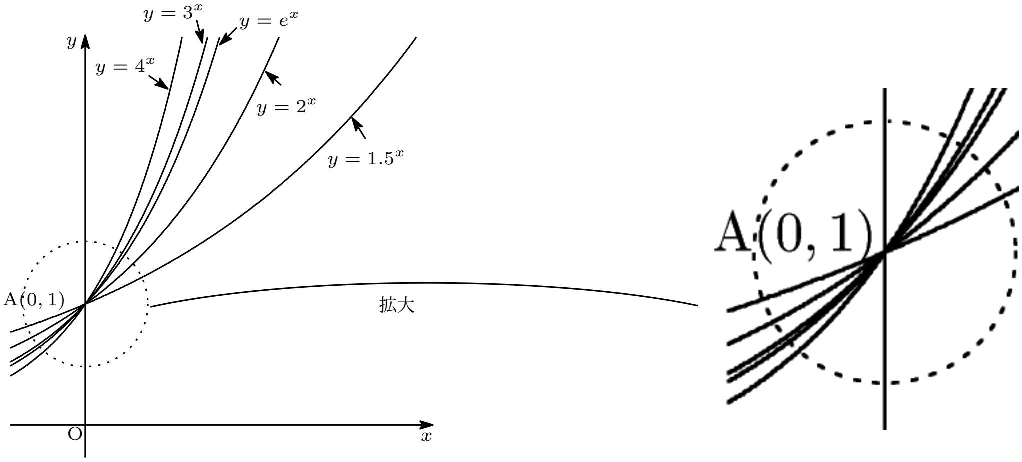
練習 3　次の極限を求めよ．ただし答えのみでよい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\sin 3x)}{x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}$

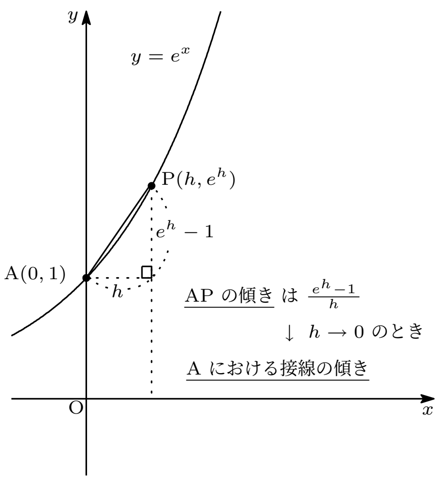
(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$

1.3　指数 · 対数関数の極限と近似



指数関数 $y=a^x$ は全て点 A(0, 1) を通るが，この点 A における $y=a^x$ の接線の傾きは a の値が増加するにつれて，増加する．ここで **A(0, 1) における接線の傾きが 1 になるような a の値を e と定義する．**[注1] $f(x)=e^x$ のとき，$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}$ だから，

$$「y=e^xの\ A(0,1)\ における接線の傾きが\ 1」\Longleftrightarrow \lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1\ (e\ の定義)$$



このように定義すると

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}\cdot e^x=e^x$$

ゆえに

$$(e^x)'=e^x$$

となって「微分しても変わらない」ので，とても便利.
また，一般の指数関数で $g(x)=a^x$ のときは

$$g'(x)=\lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}\cdot a^x$$

となる．例えば

$$(3^x)'=3^x\times\lim_{h\to0}\frac{3^h-1}{h},\quad (4^x)'=4^x\times\lim_{h\to0}\frac{4^h-1}{h}$$

ここで対数の定義から $a=e^{\log_e a}=e^{\log a}$ を用いると

$$\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{h\log_e a}-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{h\log_e a}-1}{h\log_e a}\cdot\log_e a=\log_e a$$

よって

$$(a^x)'=a^x\cdot\log a.$$

ゆえに **たった一個の**新しい数「e」を導入することによって，一般の指数関数の微分も簡単に表される．「e」がとても役立つ数であることは納得いくのではないでしょうか？

注1) $e=2.71828182845\cdots$. e の定義にはいろいろあるが，ここではグラフによる定義を採用する．他の定義は付録を参照.

e の定義に関してはいろいろの仕方があります．例えば次の 4 つの定義は全て同値です．[注2)]

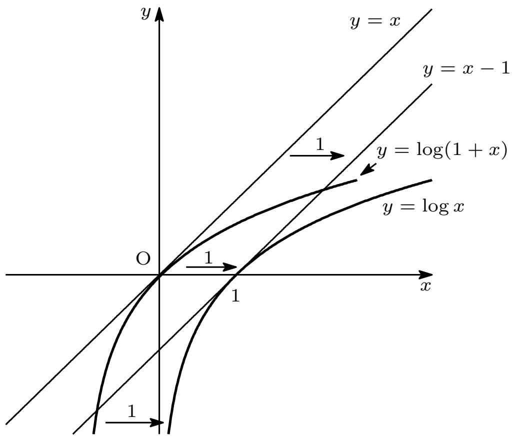
指数 · 対数の極限

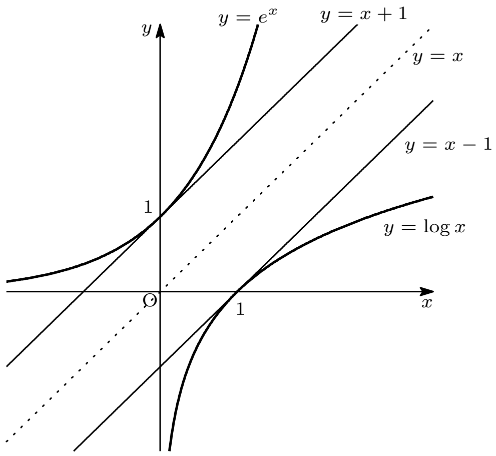
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \;\underset{\log(1+t)=x}{\overset{e^x-1=t}{\rightleftarrows}}\; \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \;\rightleftarrows\; \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \;\rightleftarrows\; \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

さて左から 1 番目と 2 番目の式から，$x \quad 0$ のとき

$$\frac{e^x-1}{x} \quad 1 \iff e^x \quad 1+x. \qquad \frac{\log(1+x)}{x} \quad 1 \iff \log(1+x) \quad x$$

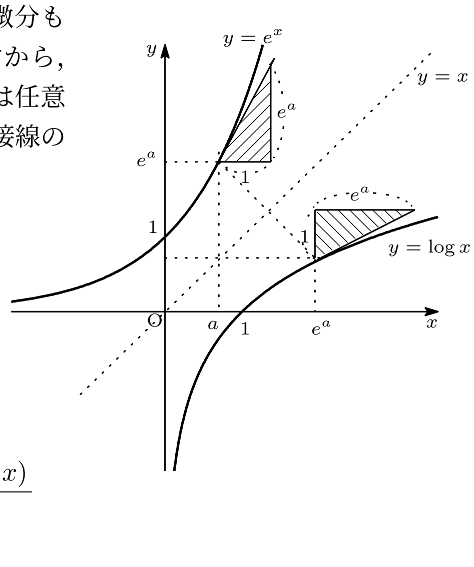
これは「$y=1+x,\ y=x$ がそれぞれ $y=e^x,\ y=\log(1+x)$ の $(0,1),(0,0)$ における接線になること」を表しています．また $y=\log(1+x),\ y=x$ を「x 軸方向に 1 平行移動」すると，それぞれ $y=\log x,\ y=x-1$ となるので，$y=x-1$ が $y=\log x$ の $(1,0)$ における接線になることが分かります．すると $y=e^x$ と $y=\log x$ のグラフは互いに $y=x$ に関して対称ですから，図形的にも 2 つの極限の式が同値なのが納得できます．





また $y=e^x$ と $y=\log x$ のグラフの対称性から，$\log x$ の微分も簡単です．右図で二つの三角形は $y=x$ に関して対称ですから，$y=\log x$ の $x=e^a$ における接線の傾きは $\frac{1}{e^a}$. ところが a は任意の実数ですから，結局 $x=X(X>0)$ における $y=\log x$ の接線の傾きは $\frac{1}{X}$ となります．すなわち

$$(\log x)'=\frac{1}{x}\ (x>0)$$



練習 4　次の極限を求めよ．ただし 答えのみでよい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\log(1+x)}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}$

注2) 左から 2 番目と 3 番目の式が同値なのは，次のようにして分かります．また 3 番目の式で $x=\frac{1}{t}$ と置くと 4 番目の式が得られます．

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \iff \lim_{t\to 0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}=1=\log e \iff \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

私事ですが, 私は高校で, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ を e の定義として習いました．この式を定義とすると「A における接線の傾きが 1 になるような指数関数がある」という「当たり前な事」も，直感に頼らずに証明できます．(「付録」参照)

1.3.1　ちょっといい e の話 (瞬間複利法)

ここでは e の古典的な定義; $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を直感的に理解してみましょう．(厳密な説明は「付録」にあります.)　$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とします．例えば

$$a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \qquad a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25,$$

$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2.37037037, \qquad a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2.44140625,$$

このように n が増加すると a_n も増加します．これを直感的に理解してみましょう．

ある銀行に一万円預けて放っておくと，一年間で 2 倍になるとします．(一年複利で利率 100%) これをもっと増やすことは出来ないでしょうか？もし**銀行の利率が 預ける期間と関係ないならば可能です．**[注3)]
仮に 半年後に下ろして利子も含めて預け入れるとしたら どうなるでしょうか? 半年後には 1 万 5 千円もらえます．それをさらに半年預けるとさらにその 1.5 倍ですから 一年後には

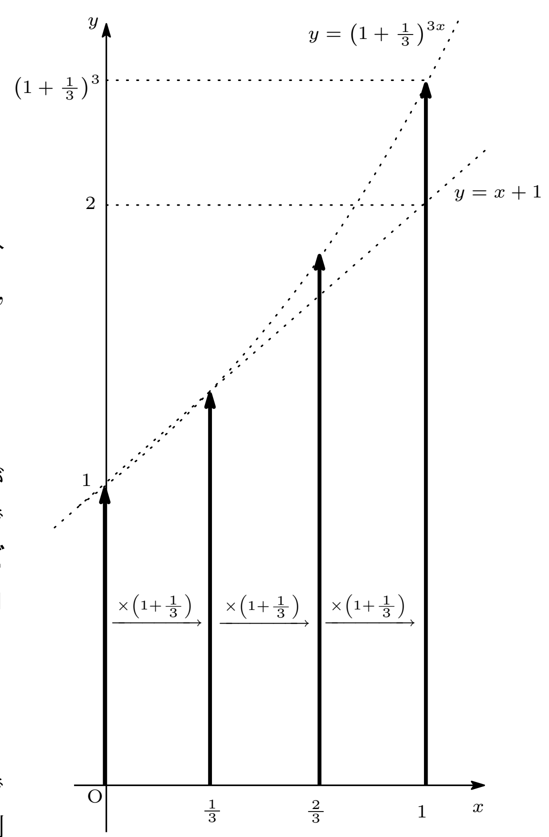
$$\left(1+\frac{1}{2}\right) 万円 \times \left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 万円$$

となります．さっきより儲かります．この預金法を「半年複利」と言います．今度は 4ヵ月後に下ろして 利子も含めて預け，さらに 4ヵ月後にも同じことをすると 一年後にはどうなるでしょうか？

$$4ヵ月後：1 万円 \times \left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}万円.$$

$$8ヵ月後：\frac{4}{3}万円 \times \left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 万円.$$

$$1 年後：\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 万円 \times \left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 万円.$$



「半年複利」より「4ヶ月複利」の方がさらに儲かることが分かりました．結局 一万円を預け入れ「 $\frac{1}{n}$ 年毎に引き出し，利子も一緒に預け入れる 」を繰り返すと，一年後には

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 万円 = a_n 万円$$

となります．これが a_n の直感的な意味です．すると a_n が n の増加関数となるのは「当たり前」です．そして，これで n をどんどん大きくしていき,「**1 秒，0.1 秒, 0.01 秒** $\cdots$ **ごとに複利で受けとり, 預け入れるようにする (瞬間複利法)**」なら 一万円を預けたときに, 一年後に受け取る金額は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ (万円)$$

となります．これが e の直感的な意味です．e　 2.71828 ですから ほぼ 2 万 7 千円も貰えることになります．一年複利で増やした場合の 2 万円よりはずーと大きくなります．

[注3)] 「利率が 預ける期間と関係ない」というのは，1 年間で 2 倍になる (一万円の利子が付く) としたら，半年では 1 万 5 千円 (5 千円の利子がつく),3ヶ月では 1 万 2500 円 (2500 円の利子がつく) になる と言うことです．ただし 実際の銀行では 利率は預け入れる期間によって変わります．

次に

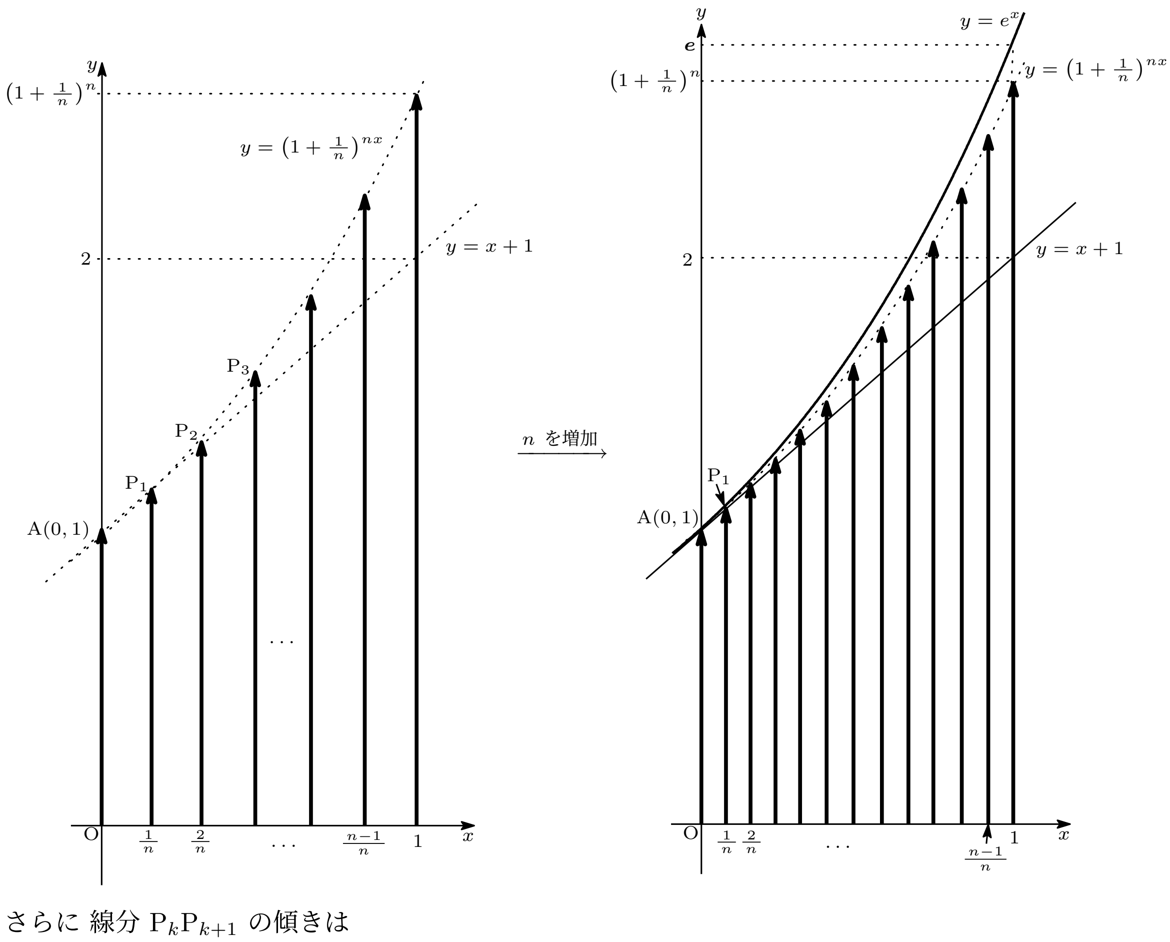
$$\mathrm{P}_1\left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right), \mathrm{P}_2\left(\frac{2}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right), \mathrm{P}_3\left(\frac{3}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right), \cdots, \mathrm{P}_k\left(\frac{k}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\right), \cdots,$$

と置くと P_k $(k=1,2,3,\cdots)$ は全て $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$ 上にあります．ここで $f_n(x)=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$ とおいて, x を一定にして n を限りなく大きくすると

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x = e^x \qquad \cdots(*)$$

これは **$n\to\infty$ のとき $y=f_n(x)$ のグラフは $y=e^x$ のグラフに限りなく近づく事** を表しています．即ち, $\lim_{n\to\infty} f_n(1)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ はもちろん，$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$, $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$ なども成り立つと言うことです．つまり，年利 100%の銀行で，瞬間複利で増やしたとすると 1 年後には e 倍に，$\frac{1}{2}$ 年後には $\sqrt{e}$ 倍に，$\frac{1}{3}$ 年後には $\sqrt[3]{e}$ 倍に増えると言うことです．(複利では指数関数的に増えるので当然!) これは x が 1 より大きい時でも成り立ちます.

さて $\mathrm{P}_1(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ ですから，A(0, 1) とすると **直線 AP_1 の傾きは常に 1 です．**（点 P_1 は直線 $y=x+1$ 上にあります.) そして $n\to\infty$ のとき点 P_1 は限りなく $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{Q}(\frac{1}{n}, e^{\frac{1}{n}})$ に近づきます．さらに点 Q は A に限りなく近づくので, **$y=x+1$ が 点 A において$y=e^x$ と接すること** もわかります.



さらに 線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の傾きは

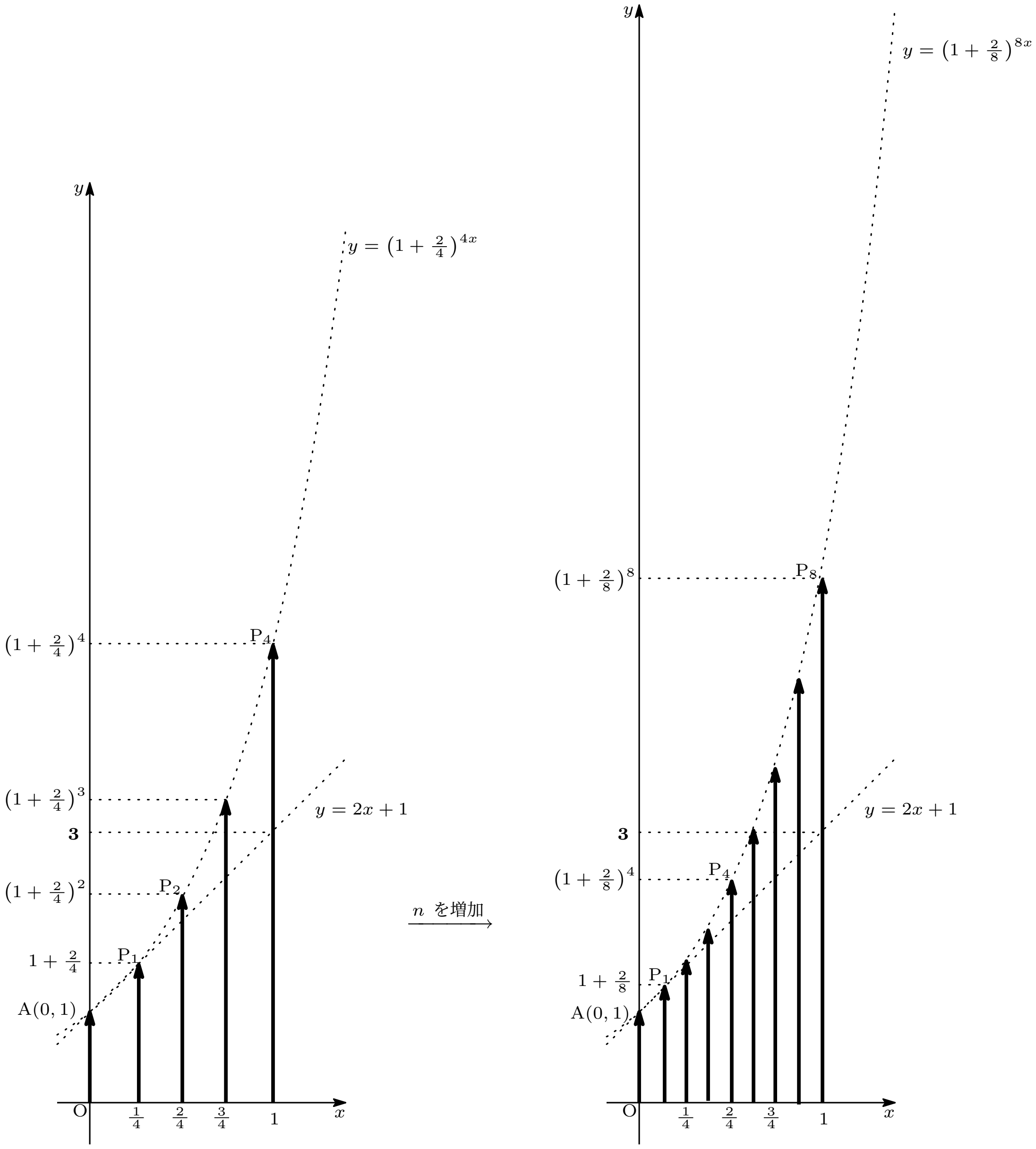
$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{\frac{1}{n}} = \frac{\cancel{\left(1+\frac{1}{n}-1\right)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{\cancel{\frac{1}{n}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k = (\mathrm{P}_k\text{の } y \text{ 成分})$$

P_k は $f_n(x) = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$ 上にあるので, $n \to \infty$ のとき $f_n{}'(x) = f_n(x)$ となることが分かります. さらに $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ ですから, $(e^x)' = e^x$ となることも分かります. 注4)

練習 5　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ を利用して次の極限を求めよ.

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\qquad (3)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\qquad (4)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

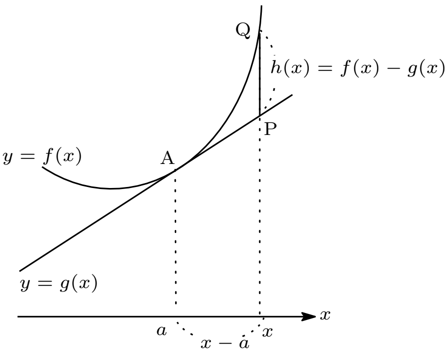
【注】 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ は 年利が 200% の銀行に 「瞬間複利」で 一万円預けたときに, 一年後にもらえる金額を表す (下図の「$x=1$ のときの矢印の長さ」の極限に当たる.)　$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ に関しても グラフで考えることもできる.



注4) 実は $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ であっても $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ とは限りません.「$f_n{}'(x)$ がある関数 $t(x)$ に一様収束すること」を言わないといけないのですが, それは大学の範囲であり, しかもここでは $(e^x)' = e^x$ の厳密な証明は済んでいるので, あくまでも「こんな感じ」と言うことです.

第2章　極限　近似(近似にも程度がある)

2.1　1次近似は接線



$f(x)$ が $x = a$ で微分可能のとき,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

これは次のように書き直すことができます.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0$$

よって $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$(これは $x = a$ における接線の式と同じ!)とすると

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = 0$$

これは $f(x)$ を $g(x)$ で近似したときの誤差を

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

とすると，**誤差 $h(x)$ が $x \to a$ のとき，$(x - a)$ に比べて 速く小さくなる** ことを表します. $x = a$ における接線 $y = g(x)$ は $y = f(x)$ の近似になっているので「a の近くでの1次近似式」といいます.

1次近似式

$f(x)$ の $x = a$ の近くでの1次近似式は，$x = a$ における接線で

$$f(x) \qquad f(a) + (x - a)f'(a)$$

このとき，$f(x)$ と近似式との誤差 $h(x) = f(x) - \{f(a) + (x - a)f'(a)\}$ は $x - a$ より速く小さくなる(高位の微小量である).

注1)

例 2　$f(x) = \sin x$ のとき, $f'(x) = \cos x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

$\sin x$ の $x = 0$ の近くでの1次近似式は x で，その誤差 $x - \sin x$ は x よりも高位の微小量となる.

注1)「$x \to a$」のとき，α, β がともに0に近づくとする．さらに このとき

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

ならば,「β が α より高位の微小量である」といいます．(β は α に比べると無視できるぐらい小さい). そして

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta}{\alpha} = k \ (k \text{ は有限な値})$$

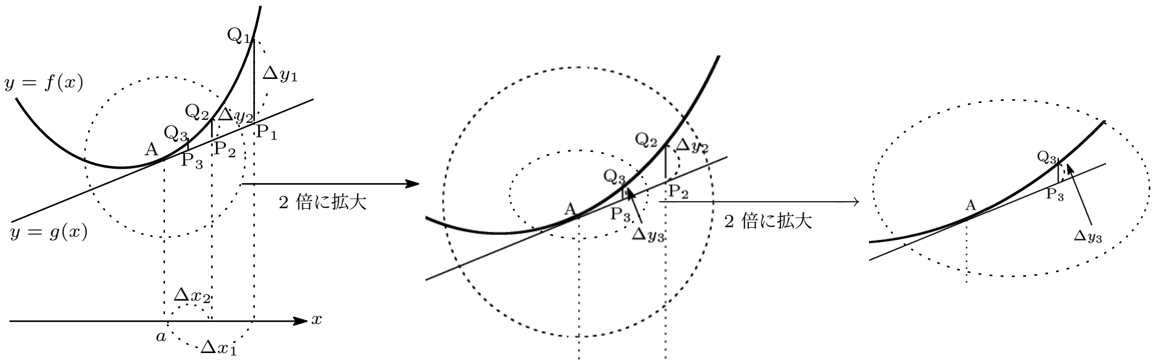
ならば 「β は α と同位の微小量である」といいます.

ここで「誤差が $(x-a)$ よりも高位の微小量となること」の図形的意味を考えてみよう．いま，体のサイズが半分，$\frac{1}{4}$ と順に小さくなって，それにつれて見える距離も小さくなっていくとしよう．(例えば もともと 10m の範囲が見える人は，半分になると 5m, さらに半分になると 2.5m しか見えなくなるものとする.) このとき どのようにグラフの見え方が変わるだろうか？ (この頁の図では $\Delta x_2 = \frac{1}{2}\Delta x_1$, $\Delta x_3 = \frac{1}{2}\Delta x_2$. またそれぞれに対応した $h(x)$ の値を $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$ とした．)

(i) $f(x)$ が $x=a$ において微分可能のとき, $x-a$ が半分になると $h(x) = f(x) - g(x)$ は半分よりも小さくなる．よって

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} < \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

したがって体の大きさが半分になったとき，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフはより「くっついて見える.」さらにサイズを半分にするともっと「グラフはくっついて見える.」



体の大きさが一倍のとき見える曲線　　体の大きさが半分になった時に見える曲線　　体の大きさが $\frac{1}{4}$ になった時に見える曲線

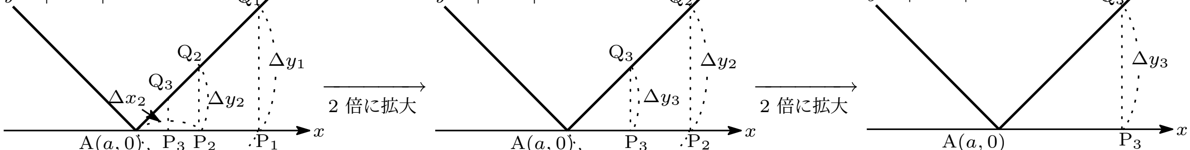
(ii) 今度は $f(x)$ が $x=a$ において微分可能でないときを考える. 例として $f(x) = |x-a|$ とする．ちょっと見ると $y=|x-a|$ の $\mathrm{A}(a,0)$ における接線は $x=0$ のような気がするが，それは間違いである．

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1, \qquad \lim_{x\to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -1.$$

すなわち $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在しないので $f(x) = |x-a|$ は $x=a$ で微分可能でない．このとき $y=|x-a|$ のグラフと $y=0$ を $x=a$ の近くで拡大してみると

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

ゆえに「拡大して見ても同じ」に見える．これが「$y=0$ は接線でない」ことの図形的意味である．



体の大きさが一倍のとき見える曲線　　体の大きさが半分になった時に見える曲線　　体の大きさが $\frac{1}{4}$ になった時に見える曲線

すなわち「$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ が $x=a$ における $y=f(x)$ の接線になるということ」は，図形的には **「拡大すればするほど二つのグラフがくっついて見えるということ」** になる．

2.2　もっと細かく見てみよう (2 次近似)

2.2.1　3 次関数の 2 次近似

3 次関数: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ を 2 次関数で近似してみましょう．まず $x = 0$ の近く での近似をします．$f'(0) = 0$ ですから $y = f(x)$ の $x = 0$ の近くでの 1 次近似は $y = 1$ です．次に，$(0, 1)$ の近くで 2 次関数で**近似できるとしたら**頂点が $(0, 1)$ で $y = 1$ を接線に持つ 2 次関数のはずです．すなわち $f(x) \quad ax^2 + 1$ と近似できるはずです．このとき $a \quad \frac{f(x)-1}{x^2}$ ですから a の値は, x^2 と $f(x) - 1$ の $x = 0$ の近くでの比を考えると求まります．すなわち

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1$$

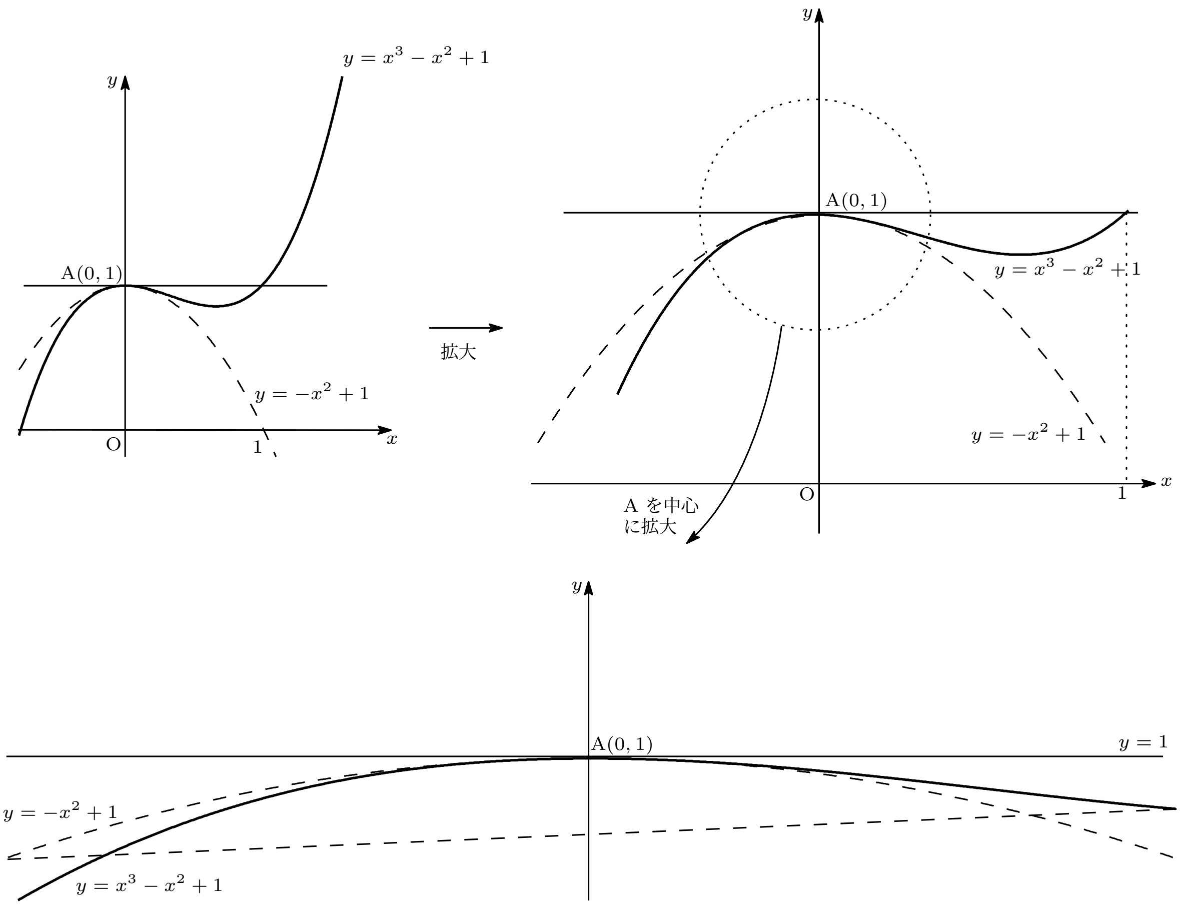
よって $x = 0$ の近くでは

$$\frac{f(x)-1}{x^2} \quad -1 \iff f(x) \quad -x^2 + 1$$

すなわち $g(x) = -x^2 + 1$ とおくと $f(x) \quad g(x)$ と近似できます．また $f(x)$ と 2 次近似式との「誤差」を $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - (-x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

ですから $h(x) = x^3$ は x^2 に比べると高位の微小量です (x^2 より速く小さくなります.) グラフで見ると，「x が 0 に近いとき」は $y = -x^2 + 1$ と $y = x^3 - x^2 + 1$ は**重なっている**ことを表しています.



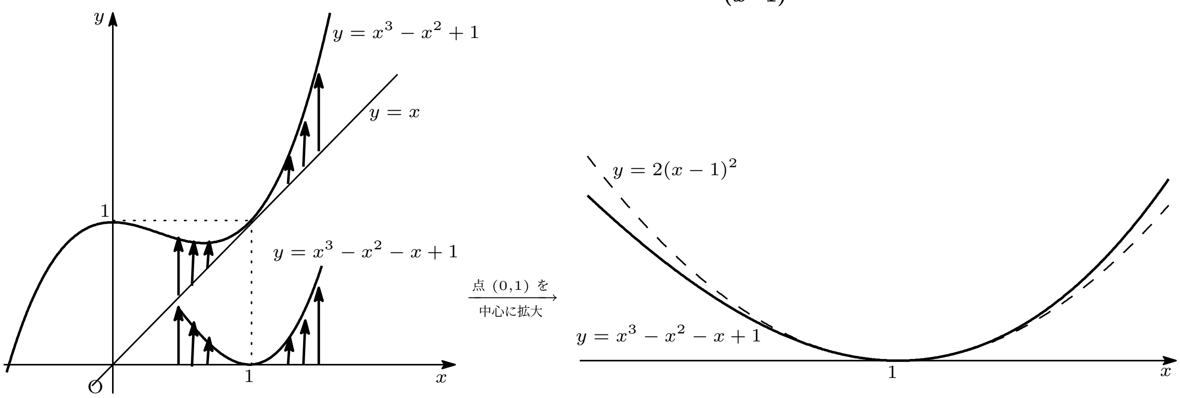
下の表からも $x = 0$ の近くでは $x^3 - x^2 + 1 \quad\ -x^2 + 1$ となることが分かります．これは **x^3 は x^2 に比べて高位の微小量である (速く小さくなる) ためです．** よって **x^3 は $x \quad 0$ のときは, 無視できて** 「$x^3 - x^2 + 1 \quad -x^2 + 1$ ($x \quad 0$ のとき)」 と 近似できます．一般に $x = 0$ の近くでは $ax^3 + bx^2 + cx + d$ の 1 次近似は 「$y = cx + d$」 で，2 次近似は「$y = bx^2 + cx + d$」 となります．

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$-x^2$	-0.01	-0.0001	-0.000001	0	-0.000001	-0.0001	-0.01
x^3	-0.001	-0.000001	-0.000000001	0	0.000000001	0.000001	0.001
$x^3 - x^2$	-0.011	-0.000101	-0.000001001	0	-0.000000999	-0.000099	-0.009
$\frac{x^3-x^2}{-x^2}$	1.1	1.01	1.001		0.999	0.99	0.9

次は $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ の $x = 1$ の近くでの近似を考えます．まず 点 $(1, 1)$ における接線 (1 次近似) は $y = x$ です．次に 2 次近似をします．しかしこのとき 頂点が $(1, 1)$ の 2 次関数：$y = a(x - 1)^2$ で近似しようとしてもうまく行きません．$f(x) \quad a(x - 1)^2 + 1$ とすると, $a \quad \frac{f(x)-1}{(x-1)^2}$．ところが,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1} = \begin{cases} \infty & (x \to 1+0 \text{ のとき}) \\ -\infty & (x \to 1-0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち 極限は存在しません．なぜなら $x = 1$ の近くで $f(x) - 1 \quad x - 1$ です．ところが **$(x - 1)$ に比べて，$(x - 1)^2$ は 高位の微小量 (速く小さくなる) なので, $\frac{f(x)-1}{(x-1)^2}$ は$\pm\infty$ に発散してしまいます．**



ところが $f(x)$ から 1 次近似式を引いて $y = f(x) - x$ を考えると **$(x - 1)^2$ より「ず〜と大きい」1 次の項を引いたわけですから, $\frac{f(x)-x}{(x-1)^2}$ は, $x \to 1$ のとき 有限な極限値を持ちます．** 注2) 実際,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

したがって $x = 1$ の近くで

$$\frac{f(x)-x}{(x-1)^2} \quad 2 \iff f(x) - x \quad 2(x-1)^2 \iff f(x) \quad x + 2(x-1)^2$$

と 2 次近似できます．注3)

注2) $y = f(x)$ と $y = x$ のグラフは 点 $(1, 1)$ で接するので $f(x) - x = a(x - 1)^2(x - \alpha)$ と書けることからも分かります．

注3) $x^3 - x^2 + 1 = A(x - 1)^3 + B(x - 1)^2 + C(x - 1) + D$ とおいて係数を比較することにより,

$$x^3 - x^2 + 1 = (x - 1)^3 + 2(x - 1)^2 + (x - 1) + 1$$

となります．これからも $x = 1$ の近くで $f(x) \quad 2(x - 1)^2 + (x - 1) + 1$ と書ける事が分かります．

$(x-a)^2$ は $(x-a)$ に比べて非常に速く小さくなるので，$f(x)$ から 1 次近似式: 「$f'(a)(x-a)+f(a)$」を引いてから，$(x-a)^2$ との極限をとらないと，$\pm\infty$ に発散してしまいます． いま

$$A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\{f'(a)(x-a)+f(a)\}}{(x-a)^2}$$

が**存在するとき** $x=a$ の近くで

$$\frac{f(x)-\{f'(a)(x-a)+f(a)\}}{(x-a)^2} \quad A \iff f(x) \quad f(a)+f'(a)(x-a)+A(x-a)^2$$

と近似できます．これを $x=a$ の近くでの 2 次近似式と言います．

2 次近似式 – 定義

$$A=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\{f(a)+f'(a)(x-a)\}}{(x-a)^2} \qquad \cdots(*)$$

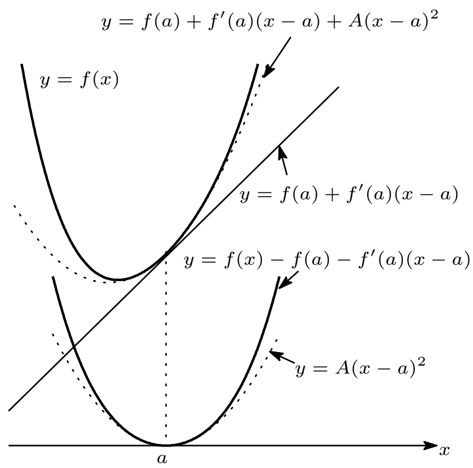
とおく．この極限値 A が存在するとき $x=a$ の近くでは

$$f(x) \quad f(a)+f'(a)(x-a)+A(x-a)^2$$

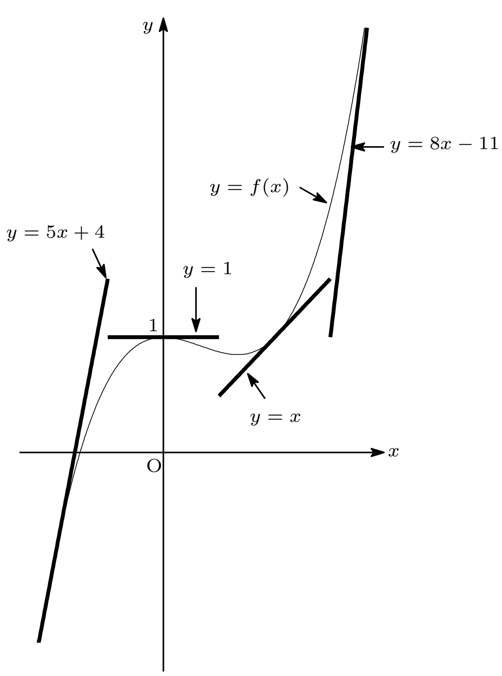
が成り立つ．これを $f(x)$ の $x=a$ の近くでの 2 次近似式という．このとき $(*)$ を書き直すと

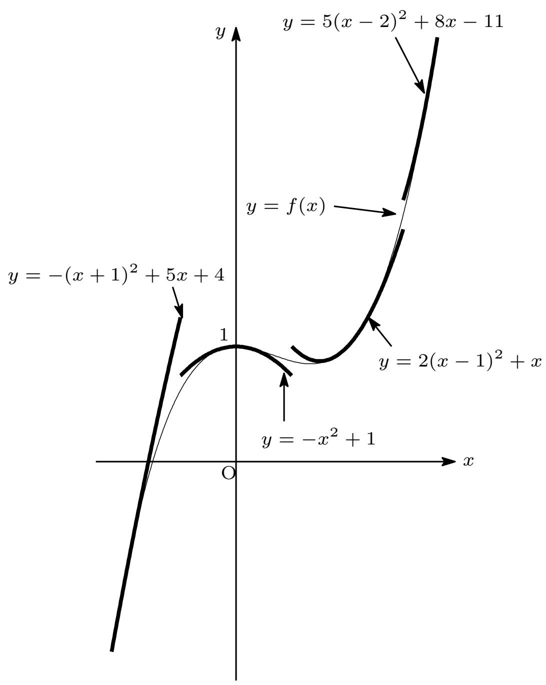
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+A(x-a)^2\right\}}{(x-a)^2}=0$$

よって 近似の誤差は $(x-a)^2$ より高位の微小量となる．



1 次近似と 2 次近似を比べてみましょう．下は $y=f(x)=x^3-x^2+1$ を $x=-1,0,1,2$ に於いて 1 次，2 次近似したグラフを 4 個 繋げたものです．2 次近似の方が良く近似していることが分かります．もし区間の幅を さらに細かく (例えば 0.5 刻みに) 取れば，さらによく近似されます．





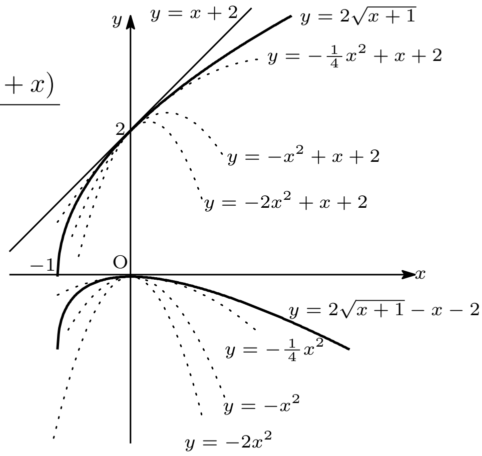
2.2.2　無理関数の 2 次近似

今度は $f(x)=2\sqrt{1+x}$ として $(0,1)$ の近くでの近似を考えましょう．$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ですから $f'(0)=1$. よって $(0,2)$ に於ける接線は

$$y=x+2 \qquad\qquad \cdots(*)$$

よって $x=0$ の近くにおける 1 次近似を求めるためには，次の極限を求めると良いです．(前頁参照)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-(x+2)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x+1}-(x+2)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\left(2\sqrt{x+1}-(x+2)\right)(2\sqrt{1+x}+2+x)}{x^2(2\sqrt{1+x}+2+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{4(1+x)-(2+x)^2}{x^2(2\sqrt{1+x}+2+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(2\sqrt{1+x}+2+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\sqrt{1+x}+2+x}\\&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$



よって $x=0$ の近くでは

$$2\sqrt{1+x}\quad -\frac{1}{4}x^2+x+2 \iff \sqrt{1+x}\quad 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 \qquad\qquad \cdots(**)$$

と 2 次式で近似できます．また誤差は x^2 よりも高位の微小量になります．(前頁参照)

そして 無理関数の場合は，近似は 実際にも役立ちます．

例 3　平方根の近似値

$\sqrt{5}$ の近似値を，近似式

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 \qquad\qquad \cdots(**)$$

を使って求めよ．

$\sqrt{5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ だから, $x=\frac{1}{4}$ として

$$\begin{cases}\sqrt{5}\qquad 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)=2.25 & \cdots(1\text{ 次近似})\\ \sqrt{5}\qquad 2\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}=2.234375 & \cdots(2\text{ 次近似})\end{cases}$$

実際の値は $\sqrt{5}\quad 2.2360679\cdots$ ですから，2 次近似の方が正確に近似できています．$\log x$ や e や π の値も 同様の近似式を使って求められます．近似公式なしでは 色々な定数の値は求まりません．

練習 6　$f(x)=2\sqrt{x+1}$ の $x=3$ の近くでの 1 次近似式と 2 次近似式を求めよ．

練習 7　$\sqrt{11}$ の近似値を $(**)$ の式を使って求めよ．

練習 8　[**分数関数の 2 次近似**] $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ とする．$f(x)$ の $x=0$ の近くでの 2 次近似式と, $x=2$ の近くでの 2 次近似式をそれぞれ求めよ．

2.3　(次節への準備) ロピタルの定理

近似式を定式化するために，その準備として次の有名な (?) 定理を説明します.

ロピタルの定理 (簡単な場合)

$f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ を含むある区間で微分可能で $f(a)=g(a)=0$, また $x=a$ 以外では $g'(x)\fallingdotseq 0$ とする．このとき $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$g'(a)\fallingdotseq 0$ のときは非常に簡単に「厳密に」証明できる.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

しかし一般的な証明はやや面倒なので 後にまわすとして，とりあえず使ってみましょう．以下のように「$x=a$ を含むある区間で $g'(x)=0$ となるのは $x=a$ だけ」 という条件は簡単にみたすので $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **の不定形になっていること を確認してから使ってください．** 注4)

例 4　ロピタルの定理

次の極限を 求めよ．(必要があれば「ロピタルの定理」を使ってもよい.)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\log x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to x^3}\frac{x-\sin x}{x^3}$

(1) $f(x)=\sqrt{x}-1$, $g(x)=\log x$ とおくと「$f(1)=g(1)=0$」．また $g'(x)=\frac{1}{x}$ ですから,「$g'(1)\fallingdotseq 0$」．よって厳密に証明しながら使えるタイプです.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\log x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

☜ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

(2) 今度は $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=x^2$ とおくと $f(0)=g(0)=0$ ですが $g'(x)=2x$ ですから $g'(0)=0$. よって先のように簡単には行きません．しかし $g'(x)=0$ となるのは $x=0$ のときだけなので, ロピタルの定理が使えます.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

☜ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(3) 先ほどと同様に $f(x)=\sin x-x^3$, $g(x)=x^3$ とおくと $f(0)=g(0)=0$ で，$g'(x)=3x^2$ ですから $g'(x)=0$ となるのは $x=0$ のときだけです．よってロピタルの定理が使えます.

$$\lim_{x\to x^3}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

練習 9　次の極限を求めよ．(必要があればロピタルの定理を使っても良い.)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^4}$

注4) さもないと $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(x-1)'}=1$ などの結果になってしまう. (もちろん正解は 「0」)

–【ロピタルの定理の図形的証明】(さらに 厳密な証明は【付録】にあります)–

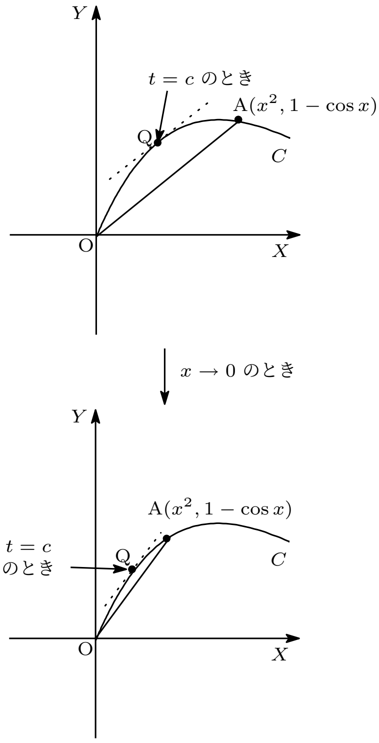
例 5　ロピタルの定理を使うと不定形の極限が簡単に求まるわけですが，そうであるがゆえに，これを証明抜きに使うと大幅減点 (または 0 点) となるでしょう．そこで

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

を例にとり証明をつけてみましょう．XY 平面上の点 $\mathrm{P}(t^2, 1-\cos t)$ をとり，t が $t=0$ を含むある区間で動くとき P の描く曲線を C とします．$x \fallingdotseq 0$ のとき，$\mathrm{A}(x^2, 1-\cos x)$ とすると, A は原点と異なるので

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = (\text{直線 OA の傾き})$$

このとき**曲線 C 上で O から A までの間の点 Q で，Q における C の接線が 直線 OA と平行になるものが存在します．**(図参照) この点 Q のパラメータを $t=c$ $(0<c<x$ または $x<c<0)$ とすると, Q における C の接線の傾きは $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ だから



$$(\text{直線 OA の傾き})\ \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ (0<c<x \text{ または } x<c<0)$$

となる c が x と 0 の間に存在します．(一般化された平均値の定理) ここで $x\to 0$ とすると $c\to 0$. しかし $\lim_{c\to 0}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ は存在するので

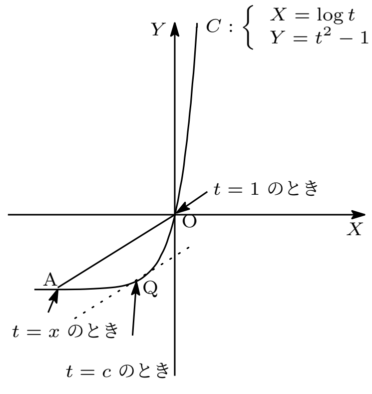
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{c\to 0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to 0}\frac{\sin c}{2c} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}$$

上の証明から分かるように 「$t=0$ 以外では $g'(t)=0$」という条件は C の接線の傾き：$\frac{f'(c)}{g'(c)}$ が存在するための条件です．しかし「$t=0$ を含む小さい区間で常に $g'(t)=0$」となることは実際には余り無いことですから そんなに気にしなくて良いでしょう.

例 6　もう 1 つ例を見てみましょう．今度は $x\to a$ の場合です．例として

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\log x}$$

を考えます．C :$f(t) = t^2-1$, $g(t) = \log t$ $(t>0)$ とします．$(g(1), f(1)) = (0,0)$ ですから，$\mathrm{A}(g(x), f(x)) = (\log x, x^2-1)$ とすると



$$\frac{x^2-1}{\log x} = (\text{直線 OA の傾き})$$

曲線 C 上で O から A までの中間の点 Q で，Q における C の接線が 直線 OA と平行になるものが存在する．この点 Q のパラメータを $t=c$ $(0<c<x$ または $x<c<0)$ とすると，Q における C の接線の傾きは $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ だから

$$(\text{直線 OA の傾き})\quad \frac{x^2-1}{\log x} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ (1<c<x \text{ または } x<c<1)$$

x が 1 に限りなく近づくとき，c も 1 に限りなく近づく．そして $\lim_{c\to 1}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ は存在するので

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\log x} = \lim_{c\to 1}\frac{2c}{\frac{1}{c}} = 2$$

このように「$f(a)=g(a)=0$」という条件は $(g(a), f(a))$ が原点に来るために必要です.

2.4　近似公式

2.4.1　2 次の近似公式

例 7　e^x の 2 次近似式

(1) e^x の $x = 0$ の近くでの 1 次近似式 (接線) を求めよ.
(2) e^x の $x = 0$ の近くでの 2 次近似式を求めよ. (必要ならばロピタルの定理を用いても良い.)

(1) $f(x) = e^x$ のとき $f'(x) = e^x$ ですから, $x = 0$ のとき $y = f(x)$ の接線 (1 次近似式) は

$$y = 1 + x$$

(2) $f(x)$ から 1 次近似式を引いて, $(x - a)^2$ との比 A をとって求めると良い.

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2}$$

これは $\frac{0}{0}$ の不定形だから, ロピタルの定理より

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\{e^x - (1 + x)\}'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

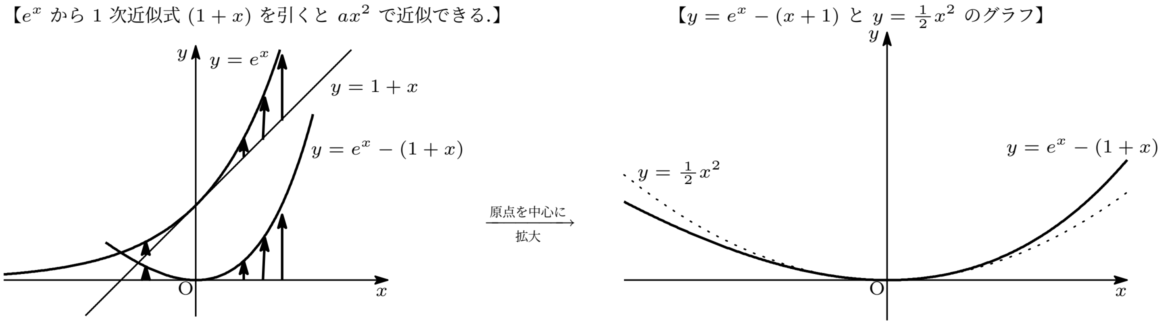
☜ $\cdots \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

よって $x = 0$ の近くでは

$$e^x \quad 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

これが $x = 0$ の近くでの e^x の 2 次近似式になります.

【e^x から 1 次近似式 $(1 + x)$ を引くと ax^2 で近似できる.】　【$y = e^x - (x + 1)$ と $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ】



このような極限はおそらく「ロピタルの定理」を使わないとなかなか求まらないと思います. 一般に

$$A = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \{f(a) + f'(a)(x - a)\}}{(x - a)^2}$$

において分子を $F(x)$, 分母を $G(x)$ とおくと, $F(a) = G(a) = 0$ で, $G'(x) = 2(x - a)$ は $x = a$ 以外では 0 になりません. よって $f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$ が存在するとき

$$\begin{aligned} A = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \{f(a) + f'(a)(x - a)\}}{(x - a)^2} &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x) - \{f(a) + f'(a)(x - a)\})'}{((x - a)^2)'} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x - a)} \\ &= \frac{f''(a)}{2} \end{aligned}$$

☜ $f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$

よって $x = 0$ の近くでの $f(x)$ の 2 次近似式は

$$f(x) \quad f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

2 次近似式 – 定理

$f''(a)$ が存在するとき, $x=a$ の近くでの $f(x)$ の 2 次近似式は

$$f(x) \quad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

誤差は $(x-a)^2$ より高位の微小量となる.

例 8　$f(x)=e^x$ のとき，$f'(x)=f''(x)=e^x$ だから, e^x の $x=0$ の近くでの 2 次近似は

$$e^x \quad f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2=1+x+\frac{1}{2}x^2$$

練習 10　$\log(1+x)$ の $x=0$ の近くでの 1 次, 2 次近似式を求めよ.

2.4.2　3 次の近似公式

今度は $f(x)=e^x$ の $x=0$ の近くでの 3 次近似 (3 次関数による近似) を求めてみましょう.

例 9　e^x の 3 次近似式

e^x の $x=0$ の近くでの 3 次近似式 を求めよ. (必要ならばロピタルの定理を用いても良い.)

e^x の $x=0$ の近くでの 1 次近似式は 「$y=1+x$」. 2 次近似式は 「$y=1+x+\frac{x^2}{2}$」 でした．2 次近似を求めるときは $A=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}$ を計算しました．これは **x　　0 のときx^2 に比べて 1 次近似式($ax+b$) は非常に大きいのでそれを除いてから極限をとらないと** $\pm\infty$ **に発散する**からでした．同様に **x　　0 のときx^3 に比べて 2 次近似式(ax^2+bx+c) は非常に大きいので，これを除いてから x^3 との比をとらないと，$\pm\infty$ に発散してしまいます．**[注5)] 従って

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}$$

の値を求めればよいはずです．これは $\frac{0}{0}$ の不定形だから ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}
B&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left\{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\right\}'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{3x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\{e^x-(1+x)\}'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x}=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

☜ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

すなわち

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}=\frac{1}{6}\iff\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{6}}{x^3}=0 \qquad \cdots(*)$$

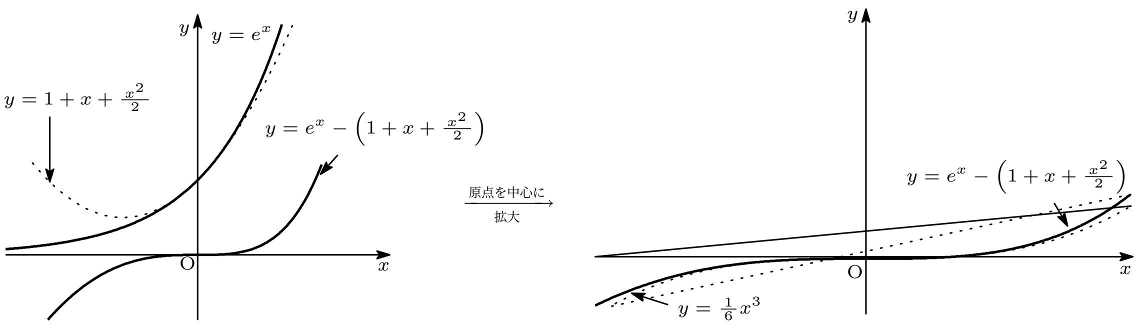
ゆえに $x=0$ の近くでは

$$e^x \quad 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

と 3 次近似できます．さらに $g(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ とおくと，$(*)$ より「$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^3}=0$」 ですから, この近似の誤差は x^3 より高位の微小量になっています.

[注5)] 実際, 前頁より $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$ だから

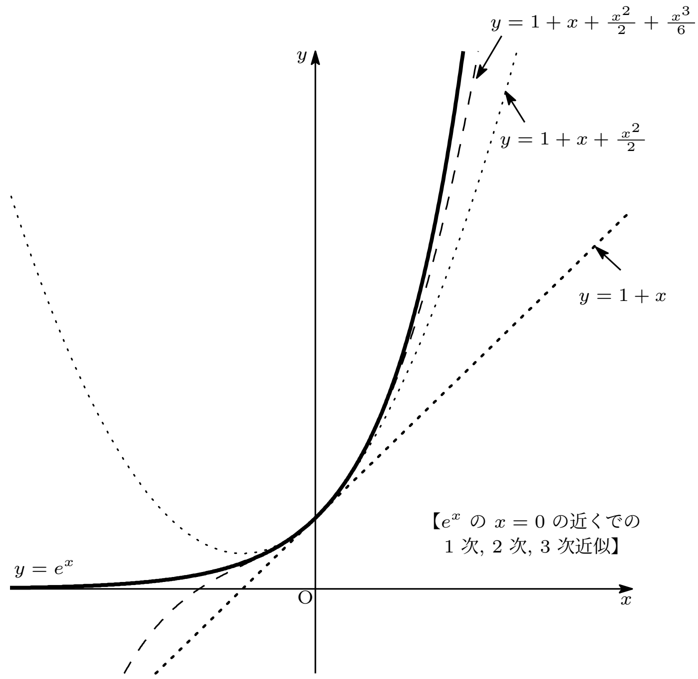
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(1+x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(1+x)}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\begin{cases}\infty & (x\to +0\ \text{のとき})\\ -\infty & (x\to -0\ \text{のとき})\end{cases}$$



【e^x から 2 次近似式： $1 + x + \frac{x^2}{2}$ を引くと ax^3 で近似できる.】

【$y = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ のグラフと $y = \frac{1}{6}x^3$ のグラフ】

$x > 0$ のときは $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2$ で，$x < 0$ のときは $e^x < 1+x+\frac{1}{2}x^2$ であることが分かります．従って $e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ は $x = 0$ を境に符号が変化し 左上のようなグラフになります．それと $y = \frac{1}{6}x^3$ のグラフを比較したのが右上です．また 下には $y = e^x$ の 1〜3 次近似式を まとめて描きました.



【e^x の $x = 0$ の近くでの 1 次, 2 次, 3 次近似】

3 次の近似公式

e^x と同様にして 一般の 3 次近似式を求めることも簡単にできます．3 次近似式は $f(x)$ から 2 次近似式を引いて，それと $(x-a)^3$ の比を考えれば求まります．すなわち

$$B = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \left\{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right\}}{(x-a)^3}$$

の値を求めればよいはずです．これは $\frac{0}{0}$ の不定形だから, ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right\}}{(x-a)^3} && \text{☜ これは } \tfrac{0}{0} \text{ の不定形}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\left\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right\}'}{\{(x-a)^3\}'}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2} && \text{☜ これも } \tfrac{0}{0} \text{ の不定形}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)\}'}{\{3(x-a)^2\}'}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)}{6(x-a)}\\
&= \frac{f'''(a)}{6} && \text{☜ } f'''(a)=\lim_{x\to a}\tfrac{f''(x)-f''(a)}{x-a}
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{f(x)-\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2\right\}}{(x-a)^3} \quad \frac{f'''(a)}{6}$$

ゆえに x が a に近いとき

$$f(x) \quad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

すなわち

3 次近似式 – 定理

$f'''(a)$ が存在するとき

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

誤差は $(x-a)^3$ より高位の微小量となる.

例 10　$f(x)=e^x$ のとき，$f'(x)=f''(x)=f'''(x)=e^x$ だから, e^x の $x=0$ の近くでの 3 次近似は

$$e^x \quad f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

練習 11　 $\sqrt{1+x}$ の $x=0$ の近くでの 3 次近似式 を求めよ.

2.4.3　$\sin x$ の 2 次 ·3 次近似

「まとめ」として $f(x)=\sin x$ の $x=0$ の近くでの近似式を求めてみます．まず 公式を使わないでやってみましょう．$x=0$ における接線 (1 次近似式) は

$$y=x \qquad \cdots(*)$$

2 次近似は $A=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}$ の値を求めればよいはずです．ロピタルの定理より

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

したがって $x = 0$ の近くでの $\sin x$ の 2 次近似式は

$$y = x + 0x^2 = x \qquad \cdots(**)$$

x^2 の項は見えませんが これは $\sin x \quad x + 0x^2$ を表しているので 2 次近似です．次に $f(x)$ から 2 次近似式を引いて x^3 との比をとります．すなわち $B = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ を考えます．ロピタルの定理より

$$B = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

よって

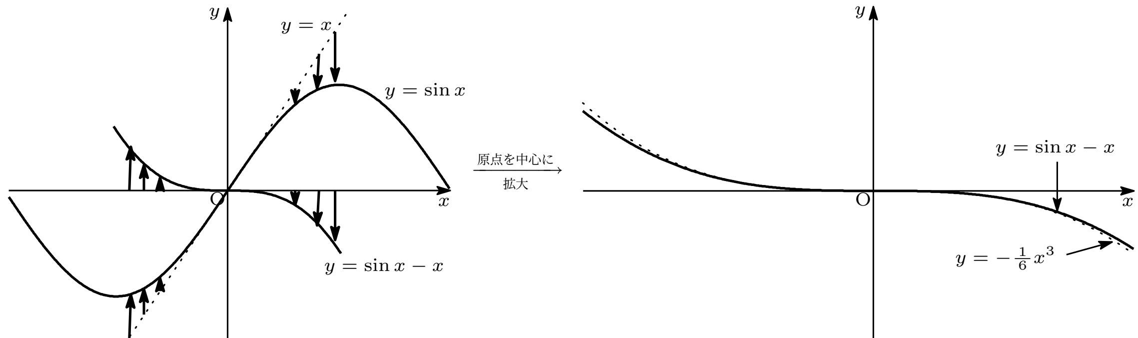
$$\sin x \quad x - \frac{1}{6}x^3 \qquad \cdots(***)$$

これが「$x = 0$ の近くでの $\sin x$ の 3 次近似式」です．

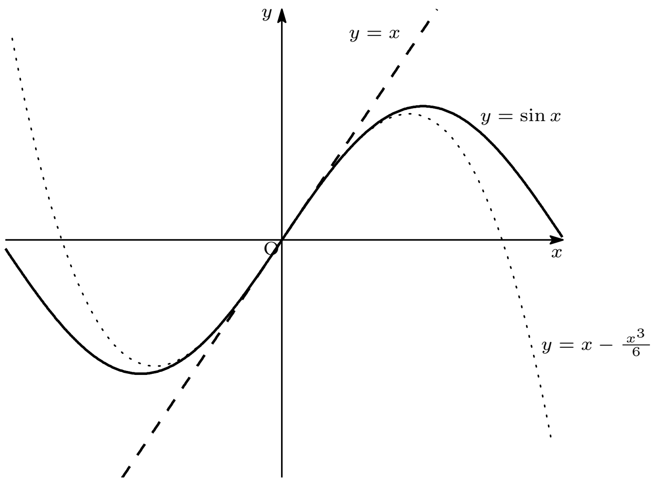
次は公式を使ってみましょう．「$f'(x) = \cos x$. $f''(x) = -\sin x$. $f'''(x) = -\cos x$」 ですから

$$f(x) \quad f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

このように結果は同じになりました．



【$\sin x$ から 2 次近似式： $x + 0x^2$ を引くと ax^3 で近似できる.】



【$\sin x$ の $x = 0$ の近くでの 1 次,2 次,3 次近似】

2.4.4 【参考】n 次近似式

同様にして n 次近似式が簡単に得られます．$f(x)$ が $x=a$ において n 回微分できるとき, [注6)]

n 次近似式

$f^{(n)}(a)$ が存在するとき $x=a$ の近くでの n 次近似式は

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

誤差は $(x-a)^n$ より高位の微小量となる．特に $x=0$ の近くでの n 次近似式は

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

上の定理から 主な関数の $x=0$ の近くでの近似式は次のようになります．

$x=0$ の近くでの n 次近似式

- $e^x \quad 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$
- $\sin x \quad x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
- $\cos x \quad 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\log(1+x) \quad x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$
- $\dfrac{1}{1-x} \quad 1+x+x^2+\cdots+x^n$
- $(1+x)^\alpha \quad 1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$

α は任意の実数. α が自然数のときは二項定理そのものです．また $\alpha=\frac{1}{2}$ とすると

$$\sqrt{1+x} \quad 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n$$

[注7)]

[注6)] $f^{(n)}(a)$ は n 回微分を表します．例えば $f^{(1)}(a)=f'(a)$, $f^{(2)}(a)=f''(a)$, $f^{(3)}(a)=f'''(a)$.

[注7)] $\frac{1}{1-x}$ の近似式は $(1+x)^\alpha$ の公式で $\alpha=-1$, x の代わりに $-x$ を代入しても得られます．また等比数列の和の公式を使ってもすぐ示せます．等比数列の和の公式より

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

よって

$$\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)=\frac{1}{1-x}-\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

誤差は x^{n+1} 程度の大きさで,「$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n}=0$」ですから誤差は x^n よりも高位の微小量になります．

高次の近似式を使うと「近似の誤差」についても 「おおよそ」分かります.

例 11　$\sin x \quad x - \frac{x^3}{6}$ だから $\sin x \quad x$ と近似したとき，その誤差はおよそ $\frac{x^3}{6}$. すなわち

$$\sin x \quad x \left(\text{誤差は}, x = 0 \text{ の近くではおよそ} \frac{x^3}{3!}\right)$$

例えば $x = \frac{\pi}{6}$ とすると

$$\sin \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \left(\text{誤差は} \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{6} \quad \frac{1}{48} \quad 0.020833\right)$$

実際,「$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \ \frac{\pi}{6} \quad \frac{3.1415926}{6} = 0.523598$」ですからその誤差は 0.023598. よく一致しています.

例 12　$\log a$ や $\sqrt{a}$ の近似値も求まります. ($\sqrt{a}$ の近似に関しては 15 頁参照)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad \cdots ①$$

x の代わりに $(-x)$ を代入して

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad \cdots ②$$

(①−②) $\times \frac{1}{2}$ より

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \qquad \cdots (*)$$

$0 < x < 1$ のとき $\frac{1+x}{1-x}$ は 1 より大きい正の数全てを取れる. いま $\frac{1+x}{1-x} = 2 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}$ としてみると

$$(3 \text{ 次近似}) \quad \log 2 \quad 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\} = 0.6913580247$$

$$(5 \text{ 次近似}) \quad \log 2 \quad 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\} = 0.6930041152$$

実際の値は $\log 2 = 0.6931471806\cdots$ です.

例 13　e^x の近似式で $x = 1$ とおいて

$$e \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

例えば

$$\begin{cases} n = 2 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5 \\ n = 3 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \quad 2.666666666 \\ n = 4 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \quad 2.708333333 \\ n = 5 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \quad 2.716666667 \\ n = 6 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \quad 2.718055556 \\ n = 7 \text{ のとき} & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} \quad 2.718253968 \end{cases}$$

$e \quad 2.718281828$ ですから, 誤差はやや $\frac{1}{(n+1)!}$ よりも大きくなっています. 例えば $n = 7$ のときは 「予想の誤差」は $\frac{1}{8!} \quad 0.0000248015$ ですが,「実際の誤差」は $2.718281828 - 2.718253968 = 0.00002786$ です. この数列の方が $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ よりも速く e に収束します.

2.4.5　極限の問題への応用

今までも「近似」の考え方を用いて，いろいろな極限を求めてきましたが，実は注意することがあります．

例 14　2 次近似の利用

次の極限を求めよ．

(1)$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

(2)$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)$

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+1-2e^x}{x^2\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{x^2\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{e^x}=1$$

$$(2)\quad \lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(-1)}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}$$

今度は近似の考え方を使って見ます．

(1)$e^x \quad 1+x$ と近似すると $e^{-x} \quad 1+(-x)$ ですから，$x \quad 0$ のとき

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\frac{(1+x)+(1-x)-2}{x^2}=\frac{0}{x^2}=0\ (?)$$

となってしまいます．この場合は**分母が x^2 ですから 同程度の微小量まで考えないとうまく行きません．すなわち 2 次近似式を使います．** $e^x \quad 1+x+\frac{x^2}{2}$ ですから $x \quad 0$ のとき

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\quad\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(1-x+\frac{(-x)^2}{2}\right)-2}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}=1 \qquad \text{(O.K.)}$$

(2) $x\to\infty$ のとき「$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{(x+1)^2-1} \quad 1+x$」ですから $x\to\infty$ のとき

$$x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)\quad x(1+x-x-1)=x\times 0=0\ (?)$$

今度も 1 次近似ではうまく行きません．そこで $\frac{1}{x}=t$ とおくと 「$x\to\infty$ のとき $t\to+0$」．よって

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{2}{t}}-\frac{1}{t}-1\right)=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{1+2t}-1-t}{t^2}$$

分母が t^2 ですから 2 次近似式を使わないとうまく行きません． $x \quad 0$ のとき「$\sqrt{1+x} \quad 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$」ですから，$t \quad 0$ のとき「$\sqrt{1+2t}=1+\frac{2t}{2}-\frac{(2t)^2}{8}=1+t-\frac{t^2}{2}$」．よって $t \quad 0$ のとき，

$$\frac{\sqrt{1+2t}-1-t}{t^2}\quad\frac{\left(1+t-\frac{t^2}{2}\right)-(1+t)}{t^2}=\frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2}=-\frac{1}{2} \qquad \text{(O.K.)}$$

このように $\frac{0}{0}$ の不定形で, 分母が x^2 と同程度の微小量ならば，分子も x^2 と同程度の微小量まで考えないとうまく求まりません．分母が x^3 ならば, 分子も x^3 の項まで考えるべきです．実際の計算ではむしろ「ロピタルの定理」を使ったほうが速くなるでしょう．しかし「近似」の考え方には「直感的でイメージをつかみやすい」というメリットがあります．ただ, これを使って $\frac{0}{0}$ の不定形を求めるには**「分母と分子を同程度の微小量まで近似すること」**が必要です．そうすれば正解が得られます．(実際 コンピュータソフトの *MuPAD* は，このような近似式を使って極限を求めています.)

第3章　付録

3.1　e の古典的な定義

指数・対数の極限

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1 \;\overset{e^x-1=t}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}}\; \lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=1 \;\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}\; \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \;\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}\; \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

本文で $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ となるような指数関数の底を e と定義しましたが，昔は $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の極限を e と定義しました．こうすると まったく図形的な直感によらず厳密に e を定義することができます．(これが 大学では最も普通の定義です.) しかし論理の流れが長くなるのが欠点 (?) です.

まず極限の存在を証明します．$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ とします. 例えば

$$a_1=1+\frac{1}{1}=2,\qquad a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2.25,$$
$$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}=2.37037,\qquad a_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\frac{625}{256}=2.441406,$$

このようにだんだん増加していきますが，これは 2 項定理を使って厳密に証明できます．二項定理より

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})}{2!}+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}\end{aligned}$$

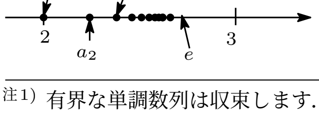
ここで n が増加すると各項は増加し，かつ 項数も増えるので a_n は増加します．また

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=1+1+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})}{2!}+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots+\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}\\&<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} &&\text{☜}\,n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n>1\cdot2\cdot2\cdot2\cdots2=2^{n-1}\\&=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} &&\text{☜ 等比数列の和の公式}\\&<3\end{aligned}$$

ゆえに a_n は単調増加し，かつ有界なので収束します．この極限値を e と定義します．[注1)] すなわち

e の古典的定義

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$



注1) 有界な単調数列は収束します．これは昔は高校の教科書には 載っていました.「当たり前」として使ってよいでしょう.

次に $\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の極限も同じく e になることを証明します．これは書いていくと明らかです．

$$a_{-3}=\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$a_{-4}=\left(1-\frac{1}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)^4=\left(\frac{4}{3}\right)^4=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots$$

一般に n が自然数のとき

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}=e$ だから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=e$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

よって x が整数値だけを取るとき「$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$」となることが証明されました．$x$ が分数など中間の値を取りながら $x\to\pm\infty$ に近づく場合も e に収束することも簡単にいえます．まず $x\to\infty$ のとき，$n\leqq x<n+1$ をみたす 自然数 n が取れるので

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

すなわち

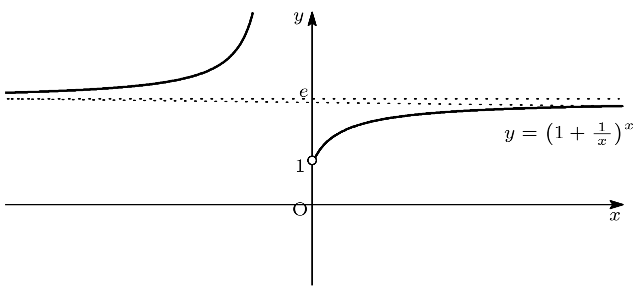
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ここで $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ だから第 1 辺と第 3 辺は e に収束する．よってハサミウチより

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$x\to-\infty$ のときは，$\lim_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ のときと全く同様にして「$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$」がいえます．よって

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (\text{これは}\textbf{定理}!)$$



これが本文で述べた公式 (表の一番最後) です．ここで $t=\frac{1}{x}$ とおくと 「$t\to 0$」のとき「$x\to\pm\infty$」 だから

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

となり 現在の高校の教科書でよく取り上げられている e の定義 (?) が導かれます．
($t\to 0$ のとき $x\to\pm\infty$ なので $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ を証明しないといけませんでした.) さらに式を変形して，やっと $\lim_{x\to 0}\frac{e^h-1}{x}=1$ の式を導くことができます．この式は「$y=a^x$ 上の点 A$(0,1)$ における接線の傾きが 1 になるような底 a が存在する．」ということを意味していて直感的には明らかです．(そのためか 数年前の教科書はこれを e の定義として採用しているものが多かったです．) 数学者というのはこんな当たり前のことを証明しないと気持ち悪いようで, 私が高校生のときは 高校の教科書でもこういう長い厳密な議論をしていました．

3.2　「ロピタルの定理」の証明

「ロピタルの定理」を本文では図形的に証明しました (17 頁). ここでは 厳密に証明してみます.

ロピタルの定理 (簡単な場合)

$f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ を含むある区間 D 内 で微分可能で $f(a)=g(a)=0$, また $x=a$ 以外では $g'(x)\fallingdotseq 0$ とする.
このとき $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

【考え方】平均値の定理

$$F(a)=F(b) \text{ ならば } F'(c)=0 \text{ となる } c \text{ が } a \text{ と } b \text{ の間に存在する}$$

を使います.
【証明】b を区間 D 内の a と異なる点とします. $F(a)=F(b)$ となるできるだけ簡単な関数を見つけるために「$F(x)=\mu f(x)-\lambda g(x)$ (μ,λは定数)」となる μ,λ が定まるか見てみます. $F(a)=F(b)$ と置いてみると

$$\mu f(a)-\lambda g(a)=\mu f(b)-\lambda g(b)\longleftrightarrow\mu\{f(a)-f(b)\}=\lambda\{g(a)-g(b)\}$$

ゆえに例えば 「$\mu=g(b)-g(a),\lambda=f(b)-f(a)$」ととり

$$F(x)=\{g(b)-g(a)\}f(x)-\{f(b)-f(a)\}g(x) \qquad\cdots(*)$$

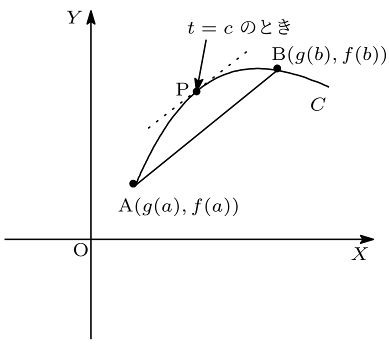
とおくと $F(a)=F(b)$ が成り立ちます. よって平均値の定理より

$$F'(c)=\{g(b)-g(a)\}f'(c)-\{f(b)-f(a)\}g'(c)=0$$

となる c が a と b の間に存在します. ここで「$a<x<b$ または $b<x<a$ において $g'(x)\fallingdotseq 0$」だから「$g(b)-g(a)\fallingdotseq 0$ かつ $g'(c)\fallingdotseq 0$.」よって

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad\cdots(\text{拡張された平均値の定理})$$

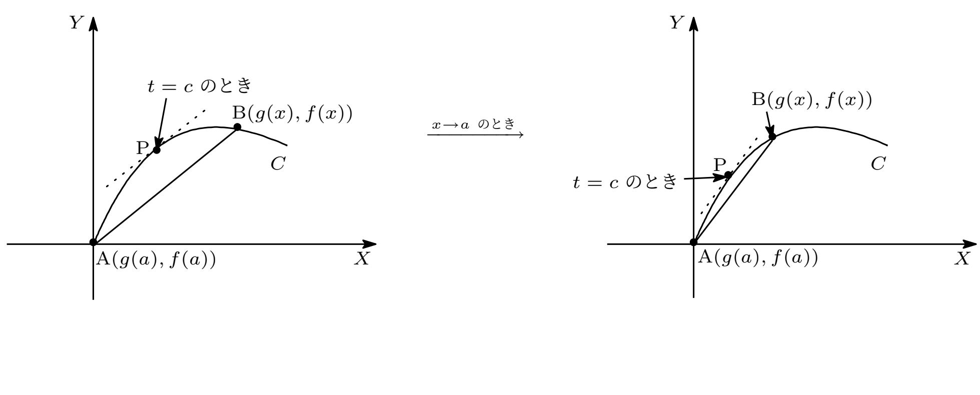
これは $x=g(t),y=f(t)$ でパラメータ表示される曲線を C とし C 上に 2 点 $\mathrm{A}(g(a),f(a))$, $\mathrm{B}(g(b),f(b))$ をとると,「曲線 C 上で A と B の間に線分 AB と平行な接線を持つ点 $\mathrm{P}(g(c),f(c))$ がある」ことを表します. 本文ではこのことを証明抜きで認めました. 後は本文の証明と全く同様です. $f(a)=g(a)=0$ だから x が十分 a に近いとき



$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が x と a の間に存在します.「$x\to a$ のとき $c\to a$」 だから, $\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ が存在するとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{(Q.E.D.)}$$



3.3　練習問題解答 (一部)

練習 1

(1)3　(2)0　(3)∞　(4)3　(5)-1　(6)∞　(7)$\dfrac{3}{2}$　(8)1　(9)$\dfrac{1}{2}$

厳密には次のようになります.
(5) 分母 · 分子に 2^n を掛けて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-1 \qquad \cdots(\text{答})$$

(6) 分母 · 分子に 3^n を掛けて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\infty \qquad \cdots(\text{答})$$

(7) $\frac{3^n}{2\cdot 2^n}<\frac{3^n+1}{2^n+1}<\frac{2\cdot 3^n}{2^n}$ だから

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{2\cdot 2^n}}<\sqrt[n]{\frac{3^n+1}{2^n+1}}<\sqrt[n]{\frac{2\cdot 3^n}{2^n}}\iff\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\cdot\frac{3}{2}<\sqrt[n]{\frac{3^n+1}{2^n+1}}<\sqrt[n]{2}\cdot\frac{3}{2}$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ だから, ハサミウチより

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+1}{2^n+1}}=\frac{3}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

(8)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1 \qquad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2} \qquad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

直感的には次のようになります.
(5) n が非常に大きいとき, $(\frac{1}{3})^n<<(\frac{1}{2})^n$ だから

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\quad\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1.\qquad\text{ゆえに}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=-1 \qquad \cdots(\text{答})$$

(6) 分子の主要部分は $(\frac{1}{2})^n$. 分母の主要部分は $(\frac{1}{3})^n$ だから , n が非常に大きいとき

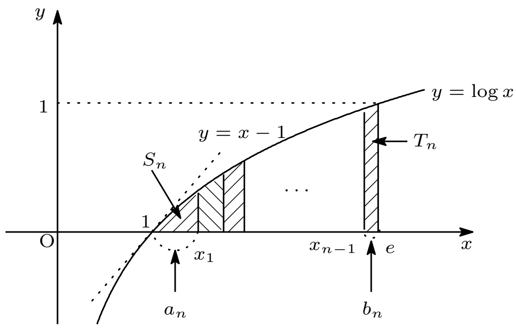
$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}\quad\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n.\qquad\text{ゆえに}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\infty \qquad \cdots(\text{答})$$

(7)n が非常に大きいとき, 「$3^n, 2^n$ に比べると 1 は無視できるぐらい小さい」ので,

$$\sqrt[n]{\frac{3^n+1}{2^n+1}}\quad\sqrt[n]{\frac{3^n}{2^n}}=\frac{3}{2}.\qquad\text{ゆえに}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+1}{2^n+1}}=\frac{3}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

(8)n が非常に大きいとき, $\sqrt{n^2+n}=\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\quad n+\frac{1}{2}$. 同様に $\sqrt{n^2-n}=\sqrt{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\quad n-\frac{1}{2}$.
よって n が非常に大きいとき

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\quad\left(n+\frac{1}{2}\right)-\left(n-\frac{1}{2}\right)=1.\qquad\text{ゆえに}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)=1 \qquad \cdots(\text{答})$$



練習 2　【考え方】$y = \log x$ の「$(1,0)$ における接線の傾きは 1 」ですから n が非常に大きいとき, $x = x_1$ の左側の領域の面積 S_n は「等辺が a の直角二等辺三角形」の面積で近似できる．一方 $x = x_{n-1}$ の右側の領域の面積 T_n は「縦が $\log e = 1$, 横が b の長方形」の面積で近似できるから

$$S_n \quad \frac{1}{2}{a_n}^2, \qquad T_n \quad b_n$$

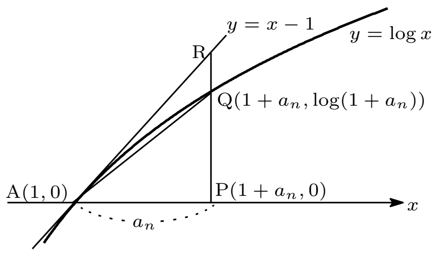
仮定より $S_n = T_n$ だから n が非常に大きいとき

$$\frac{1}{2}{a_n}^2 \quad b_n. \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{{a_n}^2} = \frac{1}{2}$$

と予想できる．あとはこれを「ハサミウチ」か「積分公式」を使って証明すればよい．

【解答】$\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{P}(1+a_n,0)$, $\mathrm{Q}(1+a_n,\log(1+a_n))$, $\mathrm{R}(1+a_n,a_n)$ とする．$y = \log x$ の「点 A における接線の傾きは 1」かつ 「$y = \log x$ は上に 凸」だから $y = \log x$ は 直線 $y = x - 1$ の下側にある．よって $x = x_1$ の左側の領域の面積を S_n とすると

$$\triangle\mathrm{APQ} < S_n < \triangle\mathrm{APR} \iff \frac{1}{2}a_n \log(1+a_n) < S_n < \frac{1}{2}{a_n}^2 \qquad \cdots ①$$

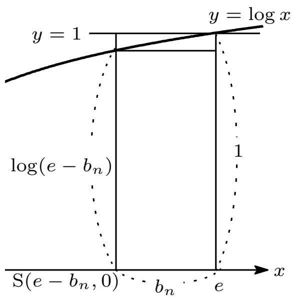


$x = x_{n-1}$ の右側の領域の面積を T_n とすると右下図より

$$b_n \log(e - b_n) < T_n < b_n \qquad \cdots ②$$

ところが仮定より $S_n = T_n$ だから ①,② より

$$\frac{1}{2}a_n \log(1+a_n) < S_n = T_n < b_n \text{ かつ}$$
$$b_n \log(e - b_n) < T_n = S_n < \frac{1}{2}{a_n}^2$$



したがって

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\log(1+a_n)}{a_n} < \frac{b_n}{{a_n}^2} < \frac{1}{2\log(e - b_n)} \qquad \cdots ③$$

$n \to \infty$ のとき，$a_n \to 0, b_n \to 0$ は明らかだから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1, \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\log(e - b_n)} = \frac{1}{2\log e} = \frac{1}{2}$$

よってハサミウチより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{{a_n}^2} = \frac{1}{2}$$

Comment

S_n に関しては接線を考え，T_n に関しては接線は考えていない理由が分かるだろうか？　$\log e = 1 \neq 0$ なので,「T_n の主要部分は長方形」であるが，$\log 1 = 0$ なので「S_n の主要部分は直角二等辺三角形」になる訳です.

練習 3

(1)3　　(2)1　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin 3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\sin 3x)}{2\sin 3x}\cdot 2\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=6$　　(4)∞

(5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x^2(1+\cos 2x)}=\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}=\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{4}{1+\cos 2x}=2$$

(6) 加法定理，または和積の公式より

$$\begin{aligned}\cos 3x-\cos x&=\cos(2x+x)-\cos(2x-x) &&☜「角度を\ \alpha\pm\beta\ の形にする」\\&=(\cancel{\cos 2x\cos x}-\sin 2x\sin x)-(\cancel{\cos 2x\sin x}+\sin 2x\sin x)\\&=-2\sin 2x\sin x\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}(-4)\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-4$$

Comment

答えだけならば $\sin\theta\quad\theta,\ \cos\theta\quad 1-\frac{1}{2}\theta^2$ を使っても求まります.
(3) $x\quad 0$ のとき

$$\frac{\sin(2\sin 3x)}{x}\quad\frac{\sin(2\cdot 3x)}{x}\quad\frac{6x}{x}=6$$

(6)$x\quad 0$ のとき

$$\cos 3x=1-\frac{1}{2}(3x)^2=1-\frac{9}{2}x^2,\ \cos x\quad 1-\frac{1}{2}x^2$$

ゆえに

$$\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}\quad\frac{\left(1-\frac{9}{2}x^2\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=\frac{-4x^2}{x^2}=-4$$

練習 4

(1)3　　(2)3　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\log 5)x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\log 5)x}-1}{(\log 5)x}\cdot\log 5=\log 5$

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\log(1+x)}=1\cdot 1=1$$

(5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot(-1)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

Comment

$x\quad 0$ のとき $e^x\quad 1+x,\ \log(1+x)\quad x$ を使ってもできます.
(4)$x\quad 0$ のとき

$$\frac{e^{x\sin x}-1}{x\log(1+x)}\quad\frac{x\cdot x}{x\cdot x}=1$$

(5)$x\quad 0$ のとき

$$\log(\cos x)=\log\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\quad-\frac{1}{2}x^2.\qquad ゆえに\ \frac{\log(\cos x)}{x^2}\quad\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

練習 5

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2=e^2$$

(3) $\frac{2}{n}=\frac{1}{m}\iff m=\frac{n}{2}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m}=e^2$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

Comment

(1) は 「一年複利で金利が 100%のとき」に，一万円を瞬間複利法で 半年預けたときの預金が $\sqrt{e}$ 万円.
(2) は「一年複利で金利が 100%のとき」に，1 万円を 瞬間複利法で 2 年預けたときの預金が e^2 万円.
(3) は 「一年複利で金利が 200%のとき」に 1 万円を 瞬間複利法で 1 年預けたときの預金が e^2 万円.
(4) は 「一年複利で金利が (-100%) のとき」に 1 万円を 瞬間複利法で 1 年預けたときの預金が $\frac{1}{e}$ 万円.
となることをそれぞれ 表しています.

練習 6　$f(x)=2\sqrt{x+1}$ の $x=3$ の近くでの 1 次近似式と 2 次近似式を求めよ.

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ だから $x=3$ における $y=f(x)$ の接線 (1 次近似式) は

$$y-4=\frac{1}{2}(x-3)\iff y=\frac{1}{2}(x-3)+4 \qquad \cdots(\text{答})$$

また 2 次近似式を求めるために $f(x)$ から 1 次近似式を引いて $(x-3)^2$ との極限 A を採ると

$$\begin{aligned}A=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-\left\{\frac{1}{2}(x-3)+4\right\}}{(x-3)^2}&=\lim_{x\to3}\frac{4\sqrt{x+1}-(x+5)}{2(x-3)^2}=\lim_{x\to3}\frac{(4\sqrt{x+1}-x-5)(4\sqrt{x+1}+x+5)}{2(x-3)^2(4\sqrt{x+1}+x+5)}\\&=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)^2}{2(x-3)^2(4\sqrt{x+1}+x+5)}=\lim_{x\to3}\frac{-1}{2(4\sqrt{x+1}+x+5)}\\&=-\frac{1}{32}\end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-\left\{\frac{1}{2}(x-3)+4\right\}}{(x-3)^2}=-\frac{1}{32}$$

ゆえに $x=3$ の近くでの 2 次近似式は

$$f(x)\quad 4+\frac{1}{2}(x-3)-\frac{1}{32}(x-3)^2 \qquad \cdots(\text{答})$$

Comment

このように $x=a$ の近くでの近似式は

$$f(x)\quad a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots$$

の形に表すのが普通です．その方が $x=a$ に近いときの近似値が求めやすいからです．例えば $x=3.1$ のときに $f(x)=2\sqrt{x+1}$ の値を求めたいとすると，大雑把な近似でよければ，1 次近似して

$$f(3.1)\quad 4+\frac{1}{2}(3.1-3)=4+0.05=4.05$$

とします.

練習 7　$\sqrt{11}$ の近似値を $(**)$ の式を使って求めよ．

$$\sqrt{1+x} \quad 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 \qquad \cdots(**)$$

$\sqrt{11}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}}=3\sqrt{1+\frac{2}{9}}$ だから，

$(**)$ において $x=\frac{2}{9}$ とおいて

$$\sqrt{11} \quad 3\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{9}\right)^2\right) \quad 3.314814815 \qquad \cdots①$$

一方

$$\sqrt{11} \quad 3.31662479$$

従ってその誤差は $0.0018099\cdots$ となる．

Comment

$\sqrt{11}=\sqrt{1+10}$ と考えると 荒っぽい近似になる．$(**)$ の式で $x=10$ とすると

$$\sqrt{11} \quad 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2=-6.5$$

全く違う値になってしまった．$(**)$ は $x=0$ の近くでの近似式なので $x=0$ に近い値を代入しないと意味がない．

練習 8　$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ とする．$f(x)$ の $x=0$ の近くでの 2 次近似式と, $x=2$ の近くでの 2 次近似式をそれぞれ求めよ．

$(0,0)$ における接線は $y=0$ だから 次の極限を求める．

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-1}=-1$$

よって $x \quad 0$ のときは

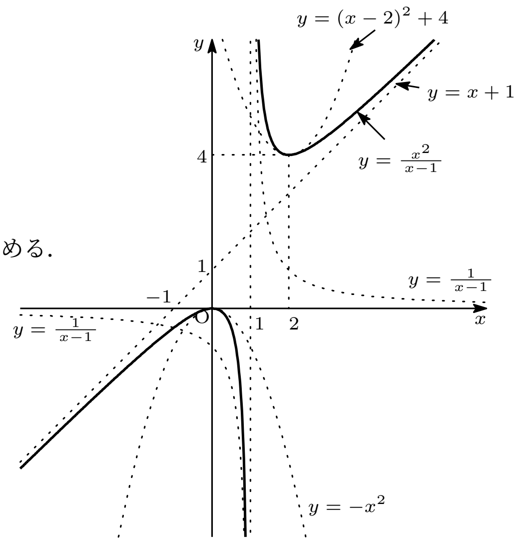
$$\frac{f(x)}{x^2} \quad -1 \Longleftrightarrow \underline{f(x) \quad -x^2}$$

$x=2$ のとき，$y=f(x)$ の接線は $y=4$ だから 次の極限を求める．

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{x^2}{x-1}-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)^2}}{(x-1)\cancel{(x-2)^2}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-1}=1$$



よって $x=2$ の近くでは

$$\frac{f(x)-4}{(x-2)^2} \quad 1 \Longleftrightarrow \underline{f(x) \quad (x-2)^2+4}$$

Comment

$\frac{x^2}{x-1}=(x+1)+\frac{1}{x-1}$ ですから，$y=x+1$ と $x=1$ は漸近線になり，$y=f(x)$ のグラフは図のようになります．しかしそのままでは，近似の様子は良く分かりません．拡大してみてください．

練習 9　次の極限を求めよ．(必要があればロピタルの定理を使っても良い.)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^4}$

(1) $\frac{0}{0}$ の不定形で かつ分母が 0 になるのは $x=0$ のときだけだから,「ロピタルの定理」より

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x} \qquad \cdots(*)$$

これは再び $\frac{0}{0}$ の不定形になって，かつ分母が 0 になるのは $x=0$ のときだけだから,「ロピタルの定理」より

$$(*)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1 \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\frac{0}{0}$ の不定形で かつ分母が 0 になるのは $x=0$ のときだけだから,「ロピタルの定理」より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^4}&=\lim_{x\to0}\frac{\left\{\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\right\}'}{(x^4)'}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+x}{4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(-\sin x+x)'}{(4x^3)'}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+1}{12x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(-\cos x+1)'}{(12x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{24x}=\frac{1}{24} \qquad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

練習 10　$\log(1+x)$ の $x=0$ の近くでの 1 次, 2 次近似式を求めよ.

$f(x)=\log(1+x)$ のとき $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ だから, $x=0$ に於ける接線 (1 次近似式) は

$$y=x \qquad \cdots(\text{答})$$

$x=0$ の近くでの 2 次の近似項の係数 A は

$$A=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$$

これは $\frac{0}{0}$ の不定形で，かつ分母が 0 になるのは $x=0$ のときだけだから,「ロピタルの定理」より

$$A=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\{\log(1+x)-x\}'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2}=-\frac{1}{2}$$

すなわち

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

となるので $x=0$ の近くでの 2 次近似式は

$$\log(1+x) \quad x-\frac{1}{2}x^2 \qquad \cdots(\text{答})$$

Comment

公式を使ってみます．$f'(x)=\frac{1}{1+x}$，$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ だから, $f'(0)=1$，$f''(0)=-1$. よって $x=0$ の近くで

$$f(x)=\log(1+x) \quad f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=x-\frac{1}{2}x^2$$

練習 11　$\sqrt{1+x}$ の $x=0$ の近くでの 3 次近似式 を求めよ.

$f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ だから

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},\ f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}},\ f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

よって

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{2},\ f''(0)=-\frac{1}{4},\ f'''(0)=\frac{3}{8}$$

ゆえに $x=0$ の近くでの $f(x)$ の 3 次近似式は

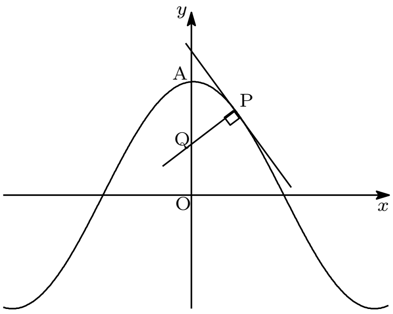
$$f(x) \quad f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=1+\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2+\frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

$\cdots$(答)

3.4 【参考】曲率円

例 1

曲線上に点 A をとり, A の近くで曲線上の点を P，A における法線と P における法線の交点を Q とする．P が A に限りなく近づくとき 点 Q がある点 Q_0 に限りなく近づくとする．このとき点 Q_0 を「曲率中心」といい，Q_0 を中心とし点 A を通る円を点 A における「曲率円」，その半径を「曲率半径」という．
(1)$y = \cos 2x$ の 点 $\mathrm{A}(0, 1)$，点 $\mathrm{P}(t, \cos 2t)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \text{かつ } t \neq 0\right)$ における 2 本の法線の交点 Q の成分を求めよ．
(2)$y = \cos 2x$ の 点 A(0,1) における曲率中心と曲率半径を求めよ．



(1) 「$(\cos 2t)' = -2\sin 2t$」 だから，P における法線の傾きは $\frac{1}{2\sin 2t}$．
よって法線の式は

$$y - \cos 2t = \frac{1}{2\sin 2t}(x - t)$$

$x = 0$ とおいて y 切片は

$$y = \cos 2t - \frac{t}{2\sin 2t} \qquad \cdots ①$$

「A における法線は y 軸」だから，A における法線と P における法線の交点は

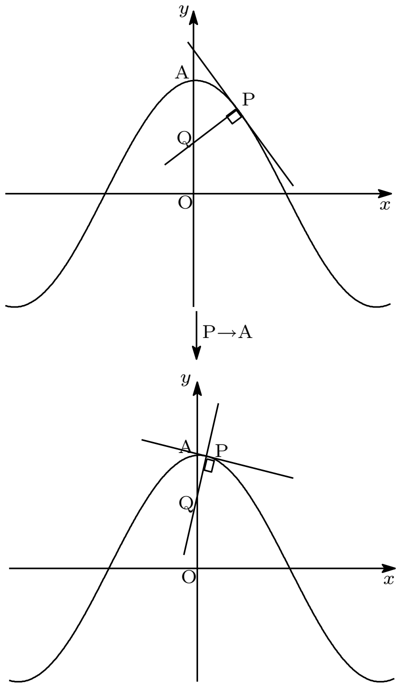
$$\mathrm{Q}\left(0, \cos 2t - \frac{t}{2\sin 2t}\right) \qquad \cdots (答)$$

(2) 仮定より, 曲率中心は P が A に限りなく近づくときの Q の成分．よって

$$(\mathrm{Q}_0 の\ y\ 成分) = \lim_{t \to 0}\left(\cos 2t - \frac{t}{2\sin 2t}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

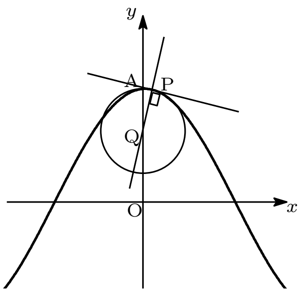
ゆえに曲率中心は $\mathrm{Q}_0\left(0, \frac{3}{4}\right)$ となる．曲率半径は

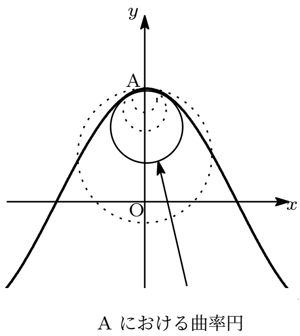
$$\mathrm{Q}_0\mathrm{A} = \frac{1}{4} \qquad \cdots (答)$$

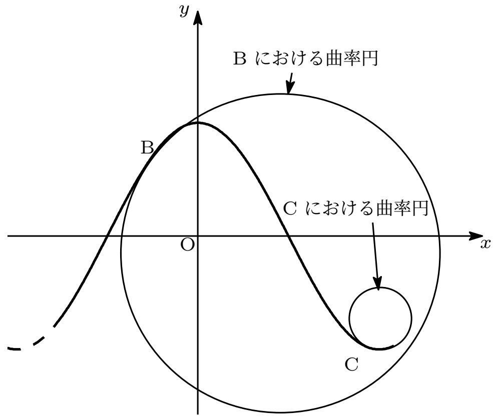


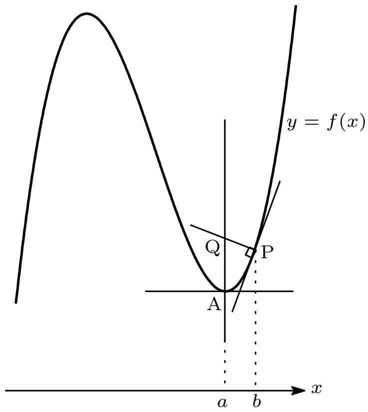
Comment

A における曲率円というのは，点 A の近くで最も曲線を近似している円を表します．求め方はいろいろ有りますが，そのうち「曲線上に点 A と点 P をとり，A における法線と P における法線の交点 Q を考えて，P→A のときの Q の極限 Q_0 を求める方法 (Q_0 が曲率円の中心となる) を採用しました．同様にして曲線上の他の点における曲率円も求まります．









$A(a, f(a))$ において「$y = f(x)$ の接線の傾きが $0 \Longleftrightarrow f'(a) = 0$」のときは，曲率半径はすぐ求まります．$y = f(x)$ 上に A の近くに点 $P(b, f(b))$ をとると，点 P における法線は

$$y = -\frac{1}{f'(b)}(x-b) + f(b)$$

点 A における法線は $x = a$ だから，交点 Q の y 成分は

$$y = -\frac{1}{f'(b)}(a-b) + f(b)$$

P→A のとき

$$\begin{aligned}\lim_{b\to a} y &= \lim_{b\to a}\left\{-\frac{1}{f'(b)}(a-b) + f(b)\right\}\\ &= \lim_{b\to a}\left\{-\frac{1}{f'(b)-f'(a)}(a-b) + f(b)\right\} && ☜ f'(a)=0\\ &= \lim_{b\to a}\left\{\frac{1}{\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}} + f(b)\right\} = \frac{1}{f''(a)} + f(a) && ☜ f''(a) = \lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f''(a)\end{aligned}$$

ゆえに曲率半径 r は

$$r = |f(a) - y| = \frac{1}{|f''(a)|}$$

例えば $f(x) = \cos 2x$ のとき $f'(x) = -2\sin 2x$，$f''(x) = -4\cos 2x$．よって $y = f(x)$ 上の点 $A(0,1)$ に於ける曲率半径は

$$r = \frac{1}{|f''(0)|} = \frac{1}{4}$$

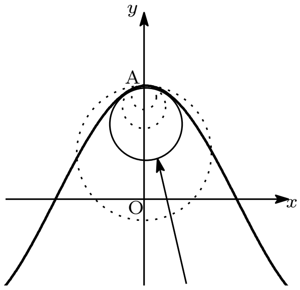
A における接線の傾きが 0 でないときでも, 同様にして 曲率半径は

$$r = \frac{(\sqrt{(1+\{f'(a)\}^2})^3}{|f''(a)|}$$

となりますが，いずれにせよ **$f(x)$ の 2 次近似だけで曲率円は定まります．** すなわち $y = \cos x$ の $A(0,1)$ における曲率円も，$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ の $A(0,1)$ における曲率円も，$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + 10x^3 + 100x^4\cdots$ の $A(0,1)$ における曲率円も全て同じになります．1 次近似 (直線近似) では足りませんが, 3 次以上の近似も必要ありません．これは円と曲線 $f = f(x)$ の点 A における曲率円 C と $y = f(x)$ は 2 次近似まで同じになることを示唆しています.

例 2　$y=f(x)=\cos 2x$ の点 A$(0,1)$ における曲率円:「$x^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$」を A の近くで 2 次近似してみましょう．円の上半分の式は

$$x^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2 \longrightarrow y=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}-x^2}$$



A における曲率円

よって「$\sqrt{1+x} \quad 1+\frac{1}{2}x$」を使うと， A の近くでは

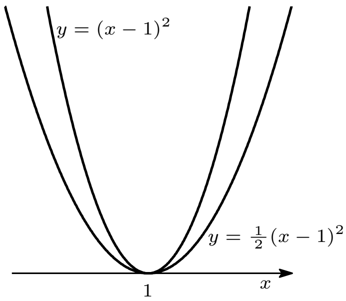
$$C:\ y=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}-x^2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2}$$
$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}(-16x^2)\right)=1-2x^2$$

一方 「$\cos x \quad 1-\frac{1}{2}x^2$」 を使うと 点 A の近くでは

$$y=\cos 2x \quad 1-\frac{1}{2}(2x)^2=1-2x^2$$

このように 2 つの曲線の 2 次近似は一致します．この例のように二つの曲線 $y=f(x), y=g(x)$ が

$$f(\alpha)=g(\alpha),\ f'(\alpha)=g'(\alpha),\ f''(\alpha)=g''(\alpha).$$



を満たしているとき $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $(\alpha, f(\alpha)$ に於いて「2 次接触」するといいます．例えば 点 A における曲率円と $y=f(x)$ のグラフは A において 2 次接触しています．これに対して，

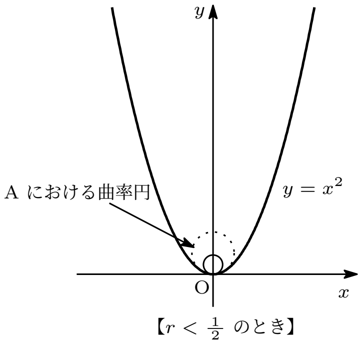
$$\text{接線を共有する} \longleftrightarrow f(\alpha)=g(\alpha),\ f'(\alpha)=g'(\alpha)$$

を満たしているときは 「1 次接触」 するといいます．例えば $y=(x-1)^2$ と x 軸は 点 $(1,0)$ で 1 次接触 しています．$y=(x-1)^2$ と $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ も 点 $(1,0)$ で 1 次接触 しています．しかしいずれも 2 次接触 はしていません．(逆に 2 次接触していれば 当然 1 次接触します．) 普通は「$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が接する」といえば「1 次接触」だけで十分です．

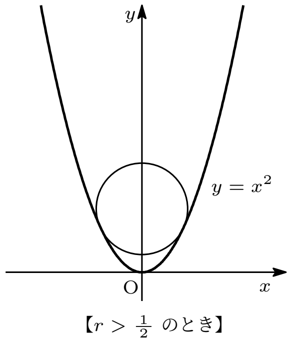
例 3　曲率円の応用として 円と放物線が接する事 について考えて見ます．$f(x)=x^2$ のとき $f'(x)=2x,\ f''(x)=2$ だから A$(0,0)$ における曲率円の半径は,

$$r_0=\frac{1}{|f''(0)|}=\frac{1}{2}$$

よって 半径 r の円を放物線の曲線に沿って上から転がしていったとき，円の半径 r が $\frac{1}{2}$ より小さい円は原点まで転がっていきますが，r が $\frac{1}{2}$ より大きい円は 途中で止まってしまいます．[注2)]



【$r<\frac{1}{2}$ のとき】



【$r>\frac{1}{2}$ のとき】

[注2)] これは「$y=x^2$ の上方にあり，放物線に接する円の式を求めよ．」と言う問題の形でよく出題されますが，今の求め方では円が放物線の「上」にあることの証明もしないといけないので，普通は中心 B$(0,b)$ から 放物線上の点 P(x,y) までの距離 d の 2 乗 $d^2=x^2+(y-b)^2=y+(y-b)^2$ の最小値を考えて解答します．(数 1·A)

第4章　無理関数と極限

まずは $x \to \pm\infty$ の時を見てみましょう．[注1)]

無理関数の極限 ($\pm\infty$ のとき)

a が定数のとき

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = 0$$

すなわち

$$x \text{ が非常に大きい時,} \quad \sqrt{x+a} \quad \sqrt{x}.$$

特に $\sqrt{x^2}=|x|$ だから

$$|x| \text{ が非常に大きい時,} \sqrt{x^2+a} \quad |x|$$

x が非常に大きい時,「定数 a は x に比べれば **ゴミ** のようなもので無視できる」という訳です．

例 1　無理関数の極限 (その 1)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-6x+5}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-6x+5}-x)(\sqrt{x^2-6x+5}+x)}{\sqrt{x^2-6x+5}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2-6x+5}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}+1} = -3$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-6x+5}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-6x+5}+x)(\sqrt{x^2-6x+5}-x)}{\sqrt{x^2-6x+5}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2-6x+5}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-6+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}-1} = 3$$

[注2)] 次はおおらかに考えて見ましょう．

$$\sqrt{x^2-6x+5} = \sqrt{(x-3)^2-4}$$

$x \to \pm\infty$ のとき，(-4) は $(x-3)^2$ に比べると無視できるぐらい小さいので

$$\sqrt{(x-3)^2-4} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3 & (x \geqq 3 \text{ のとき}) \\ -(x-3) & (x < 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ゆえに $x \to \infty$ のとき

$$\sqrt{x^2-6x+5}-x \qquad (x-3)-x = -3$$

$x \to -\infty$ のとき

$$\sqrt{x^2-6x+5}+x \qquad -(x-3)+x = 3$$

注1) 無理関数は本来は $\sqrt{ax+b}$ の関数を表すが，ここでは $\sqrt{\text{多項式}}$ を指すものとする．
注2) ここで分数の「逆有理化」をしていますが，これは「$\infty-\infty$」の不定形を「$\frac{\infty}{\infty}$」の不定形に変形するために行っています．また $x \to -\infty$ のときは「$-x=t$ とおくと $t\to\infty$」となるので，$x\to\infty$ のときと同様に解く事もできます．

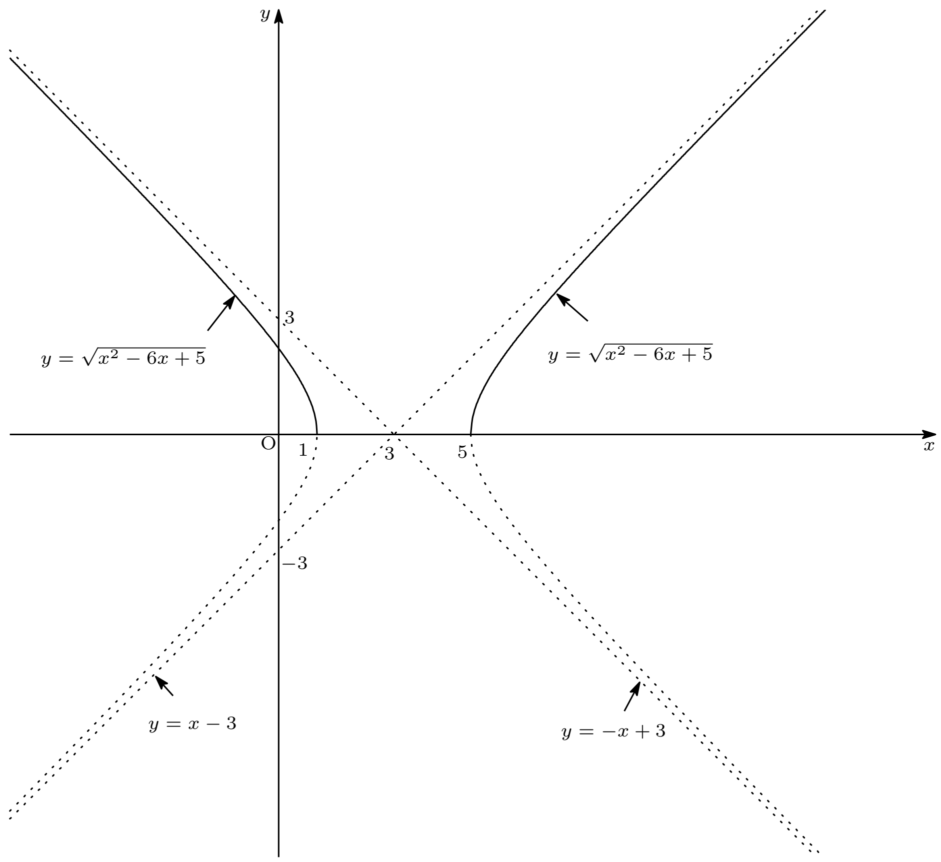
次は グラフを見てみましょう.

$$y=\sqrt{x^2-6x+5} \iff y^2=x^2-6x+5 \iff y^2=(x-3)^2-4 \iff \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1 \text{ かつ } y \geqq 0.$$

よって $\underline{y=\sqrt{x^2-6x+5}\text{ は双曲線の上半分を表しています}}$ そして

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-6x+5}-x)=-3 \iff \lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2-6x+5}-(x-3)\right\}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-6x+5}+x)=3 \iff \lim_{x\to-\infty}\left\{\sqrt{x^2-6x+5}-(-x+3)\right\}=0$$

すなわち「$x\to\infty$ のときの漸近線が $y=x-3$」,「$x\to-\infty$ のときの漸近線が $y=-x+3$」となることを表しています. $\lim_{x\pm\infty}\sqrt{(2\text{ 次式})}$ のタイプは, 実質は双曲線の漸近線を求める問題が多いです.



練習 1　次の極限を求めよ. ただし答えだけでよい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-3x}+2x)$

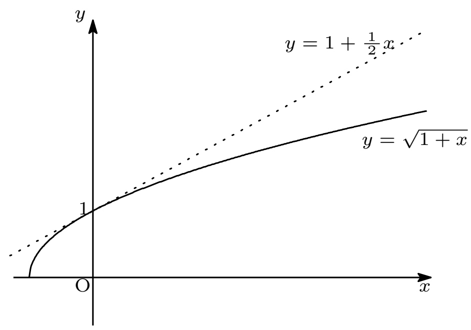
次は $x \to a$ のタイプを考えて見ます．今度は点 $(a, f(a))$ における接線を考えることになります．

無理関数と極限 ($x \to a$ のタイプ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

すなわち $x \quad 0$ のとき，

$$\sqrt{1+x}= \quad 1+\frac{1}{2}x \qquad \cdots ①$$



とみなしてよいことを表しています．また

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}x\right)^2-\frac{x^2}{4}} \quad 1+\frac{1}{2}x \qquad \cdots ②$$

ですから，x が十分小さいときは「x^2 は，$1+\frac{1}{2}x$ に比べると無視できるぐらい小さい」ことを意味しています．さらに ① は $y=1+\frac{1}{2}x$ が $y=\sqrt{1+x}$ の $(0,1)$ に於ける接線になっていることを表しています．(1 次近似)

例 2　無理関数の極限 (その 2)

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)-(3-x)}{x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}=\frac{1}{3}$$

「近似」の考え方を使って見ましょう．(1)x が十分小さいとき

$$\sqrt{3+x}=\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{x}{3}} \quad \sqrt{3}\left(1+\frac{1}{6}x\right), \qquad \sqrt{3-x}=\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{x}{3}} \quad \sqrt{3}\left(1-\frac{1}{6}x\right).$$

よって $x \quad 0$ のとき

$$\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x} \quad \frac{\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{6}x\right)-\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{6}x\right)}{x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) $x-2=t$ とおくと，$x\to 2$ のとき $t\to 0$ だから

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2(2+t)+5}-3}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{9+2t}-3}{t} \qquad \cdots (*)$$

ここで t が十分小さいとき

$$\sqrt{9+2t}=\sqrt{9}\sqrt{1+\frac{2t}{9}} \quad 3\left(1+\frac{t}{9}\right)=3+\frac{t}{3}. \qquad \therefore \frac{\sqrt{9+2t}-3}{t} \quad \frac{\left(3+\frac{t}{3}\right)-3}{t}=\frac{1}{3}$$

うまく行きました．しかし，普通に逆有理化したほうが速いかもしれませんね．

練習問題解答

練習 1

(1)x が非常に大きいとき，定数項は $(x-\frac{3}{2})^2$ に比べて無視できるので

$$\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}\quad\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}=\left|x-\frac{3}{2}\right|=x-\frac{3}{2}$$

ゆえに

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)-x=-\frac{3}{2}$$

(2)

$$\sqrt{4x^2-3x}=\sqrt{\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}\quad\sqrt{\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2}=\left|2x-\frac{3}{4}\right|=-\left(2x-\frac{3}{4}\right)=-2x+\frac{3}{4}$$

ゆえに

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-3x}+2x)=\left(-2x+\frac{3}{4}\right)+2x=\frac{3}{4}$$

Comment

途中の式も必要なときは，分母の逆有理化をすればよい．例えば (1) は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-x)&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x}-x)(\sqrt{x^2-3x}+x)}{\sqrt{x^2-3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

第 5 章　無限級数の和

本文では 数列の極限しか触れられませんでしたが，無限級数の和も苦手な人が多いので，ここで簡単に触れます.
無限級数の和 は，部分和 S_n の極限として定義されます.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\underbrace{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)}_{\text{部分和 } S_n}$$

$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$ **もまた数列**ですから，結局は 数列の極限の問題になるわけです．しかし 部分和 S_n を簡単に求められないところが違います．実際の問題では S_n が簡単に求まる場合か，または 「$\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$ だから S_n は発散する」ことを使った問題が多いです．ハサミウチを利用する場合もあります.

例 1　無限級数の和の極限 (その 1)

次の無限級数は収束するか，発散するか述べよ．収束する場合は その和を求めよ.

(1)$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^n$

(2)$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3)$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(4)$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(1)$\{2^n\}$ は初項 2, 公比 2 の等比数列だから部分和 S_n が求まります.

$$S_n = \frac{2(2^n-1)}{2-1}$$

$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$ だから S_n は ∞ に発散します.

(2)$\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列だから 部分和 S_n が求まります.

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ だから

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

(3) $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ ですから, $a_k=f(k)-f(k+1)$ の形で書けるので，部分和が求まります.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

(4) $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}=-(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$. すなわち $a_k=f(k)-f(k+1)$ の形で書けるので，部分和がまります.

$$\begin{aligned} S_n &= -\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}) \\ &= -\left\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\right\}=-1+\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(-1+\sqrt{n+1})=\infty$$

以上は 全て S_n が n の式で表されるタイプでした．このタイプは結局は $\{a_n\}$ の極限を求める問題と同じです．[注1)]

次は S_n を n の式で表すことができない (または非常に難しい) タイプです．このタイプは「$\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$ で発散する」か，または「不等式を使って評価する」タイプが多くなります.

例 2　無限級数の和の極限 (その 2)

次の無限級数は収束するか，発散するか述べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

注1) 一般に 初項 a, 公比 r $(r \fallingdotseq 1)$ の等比数列の部分和は $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ですから, 初項が 0 でない場合は $-1<r<1$ **のときに限り 無限等比級数は収束し，その和は $\frac{a}{1-r}$ になります．** すなわち $-1<r<1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r} \qquad \cdots(公式)$$

この公式を使えば**多少**時間は節約できますが，**それは全体像をつかむことに比べれば小さなことです．**

(1)$a_k = f(k) - f(k+1)$ の形で書けそうもなく，S_n は求まりません．しかし $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \fallingdotseq 0$ なので無限大に発散します.

(2) 第 2 項以降を 第 n 群が 2^{n-1} 個の要素を持つように群に分けます．第 n 群の末項までの和を $S_{n\ 群}$ とすると

$$
\begin{aligned}
S_{n\ 群} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{第\ 1\ 群} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{第\ 2\ 群} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{第\ 3\ 群} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}_{第\ n\ 群} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}個} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}n
\end{aligned}
$$

n が大きくなると $\frac{1}{2}n$ も限りなく大きくなるので

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(3)　今度は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ が収束すること (**例 1**　) を使います．　$a_k = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ $(k = 2, 3, 4, \cdots)$ だから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

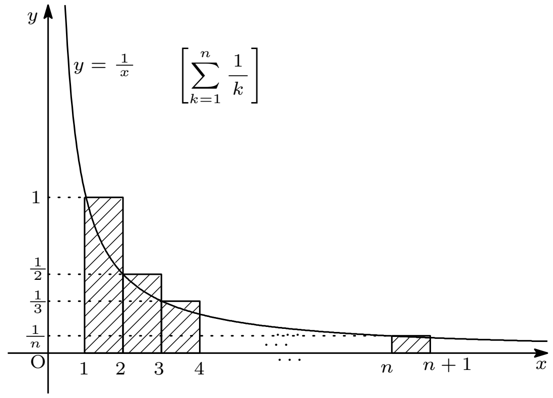
S_n は単調増加でかつ有界なので収束する.

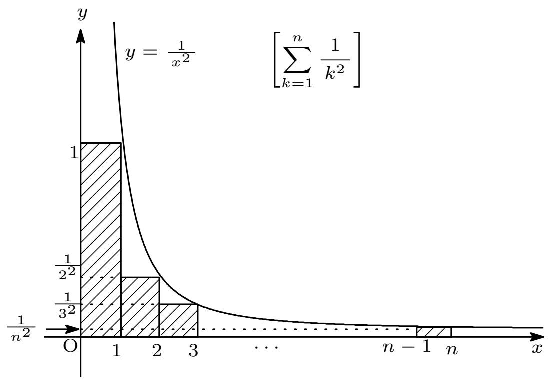
$\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$ ならば無条件に発散しますが，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても 上の (2) のように発散する場合も，(3) のように収束する場合も有ります．注2)

注2)「無限級数が収束するとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$」 となります．すなわち「 $\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$ ならば 無限級数は発散する.」(対偶)
【証明】 $n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$. よって $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (有限値) のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \{S_n - S_{n-1}\} = S - S = 0$.

また 任意の n に対し $a_n < M$ をみたす定数 M が存在するとき,「$\{a_n\}$ は, 上に有界である」と言います．上に有界な単調増加数列は収束します．同様に任意の n に対し $a_n > M$ をみたす定数 M が存在するとき,「$\{a_n\}$ は, 下に有界である」と言います．下に有界な単調減少数列は収束します．なお，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ となることが知られています.

$a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は，「幅 1 で 高さが a_k の長方形の面積の和」と考えると良く分かります．





例えば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ は $y = \frac{1}{x}$ のグラフを使うと，左上図の斜線の長方形の面積の和に等しく，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ は $y = \frac{1}{x^2}$ のグラフを使うと，右上図の斜線の長方形の面積の和に等しくなります．左の図より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \Big[\log x\Big]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log(n+1) = \infty$ だから

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$$

また

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^2} dx = 1 + \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

S_n は 単調増加し かつ 有界なので $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は 収束する．さらに $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$ などが収束することも同様に示せます．すなわち $a_n > 0$ のときは**収束のスピードが $\frac{1}{n}$ と同じかまたは遅いと無限大に発散してしまいます．また 収束のスピードが $\frac{1}{n}$ より速いと有限な極限値を持ちます．** 注3)

Comment

無限級数に対しても「大雑把に考える」ことは重要です．例えば **例 2** で $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ は 1 に収束し，$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ は無限大に発散しました．しかし k が十分大きいときは $\frac{1}{k(k+1)} \overset{\text{比}}{\ } \frac{1}{k^2}$，$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \overset{\text{比}}{\ } \frac{1}{2\sqrt{k}}$ ですから，$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ が収束することと，$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ が発散することは明らかです．実際，

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} > \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \tag{5.1}$$

で $\frac{1}{k^2}$ が収束し，$\frac{1}{\sqrt{k}}$ が無限大に発散することから証明できます．

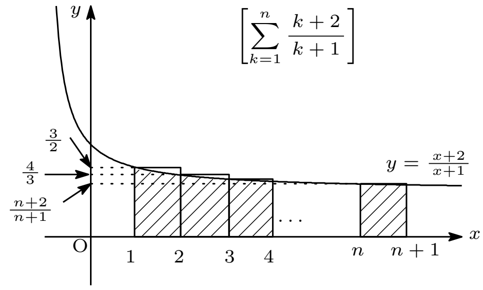
注3) 例えば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$ の収束は次のようにして示せます．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1.1}} < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^{1.1}} dx = 1 + \Big[-\frac{10}{x^{0.1}}\Big]_1^{n} = 2 - \frac{10}{n^{0.1}} = 2 - \frac{10}{\sqrt[10]{n}} < 2. \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}} < 2.$$

一般に $Z(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s}$ とおくと $s > 1$ のとき $Z(s)$ は収束し，$0 < s \leqq 1$ のとき 発散します．

そして $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}$ は無限大に発散することは明らかです．$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$ で $\frac{n+2}{n+1}$ は n の減少関数だから

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}>(\text{横}\,n,\text{縦}\,1\,\text{の長方形の面積})=n$$



ゆえに

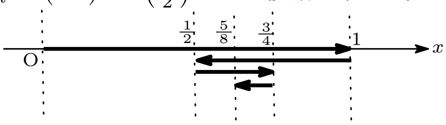
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k+1}=\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty}2^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}3^n$ などが発散することはさらに明らかです．

a_n が一定符号でないときは，ベクトルの和 (移動の合成) と考えると良く分かります． 例えば

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

は $v_k=(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ の移動の和と考えると収束することが分かります．[注4)]



練習 1　次の無限級数は収束するか，発散するか述べよ．収束する場合は その和を求めよ．

(1)$1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\frac{16}{81}-\cdots$　　(2)$1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots$

(3)$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots$　　(4) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

(5) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

練習 2　次の無限級数は収束するか，発散するか述べよ．ただし結果のみでよい．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

注4) 一般に正の項と負の項が交互に現れる数列を交代級数と言います．交代級数

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+\qquad(a_k\text{は正})$$

に於いて 「$\{a_n\}$ が単調減少 $(a_{n+1}<a_n)$ で $\lim_{n\to\infty}a_n=0$」 ならば, この級数は収束します．例えば

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdots=\log 2$$

となることが知られています.

練習問題解答

練習 1

(1) $\dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{3}{5}$　(2) 振動　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}$ なので，∞ に発散

(4) 部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$$

. (5)

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{2}\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}\right)=-\frac{1}{2}\left\{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})+\cdots+(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}=\infty$ だから

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\infty$$

練習 2

(1) 収束　(2) 収束　(3)∞ に発散

n が十分大きいとき

$$\frac{2^n+1}{3^n+1}\ \overset{比}{\ }\ \frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n.\qquad \frac{1}{n^2+1}\ \overset{比}{\ }\ \frac{1}{n^2}.\qquad \frac{n}{n^2+1}\ \overset{比}{\ }\ \frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ は公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列だから，その和は収束する．よって，$\left\{\frac{2^n+1}{3^n+1}\right\}$ の和も収束する．また $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ の和は有限な値に収束するので $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ の和も 収束する．一方 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ の和は ∞ に発散するので $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ の和も ∞ に発散する．これで正解ですが，より厳密には 不等式で評価します．

(1)

$$\frac{2^n+1}{3^n+1}<\frac{2^n+1}{3^n}<2\cdot\frac{2^n}{3^n}$$

「$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{3^k}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2$」で有限だから，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+1}{3^k+1}$ も有限になる．

(2)(3)

$$\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2},\qquad \frac{n}{n^2+1}>\frac{n}{2\cdot n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は有限なので $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ は収束する．また $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ なので $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}=\infty$．このように **収束するかどうかの判定には「大雑把に」評価すればよい．**

第6章　グラフと近似

グラフでもっとも大切なことは，**「微分する前に考える」**ということです．ちょっと考えるだけで，概形が分かることが少なくありません．特に，よく知られている関数の「和 · 差」で表される場合 (**重ね合わせ**) と勾配関数，減衰関数は重要です．さらに極限や漸近線を調べることによっても概形が分かることが非常に多いです．微分はその後でも遅くありません.「全体 ⟶ 部分へ」仕上げていきましょう．

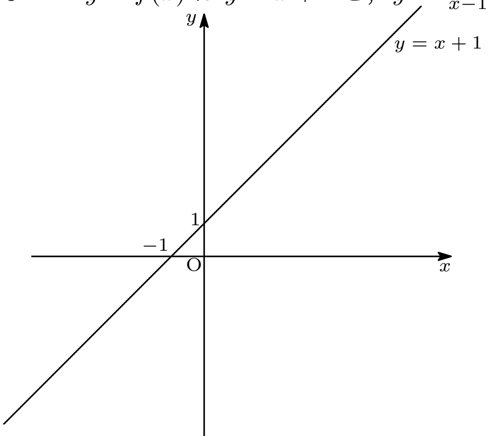
例 1　(重ね合わせ)

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

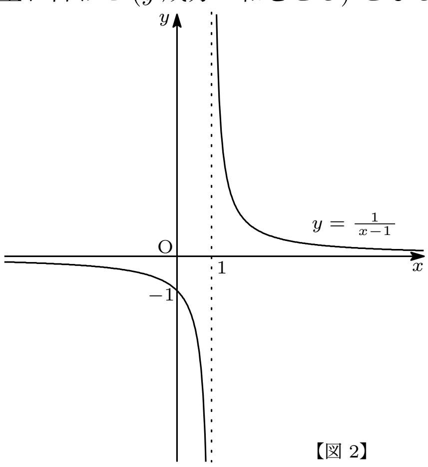
のグラフの概略を描け．

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$$

よって $y=f(x)$ は $y=x+1$ と，$y=\frac{1}{x-1}$ の重ね合わせ (y 成分の和をとる) となる．



【図 1】



【図 2】

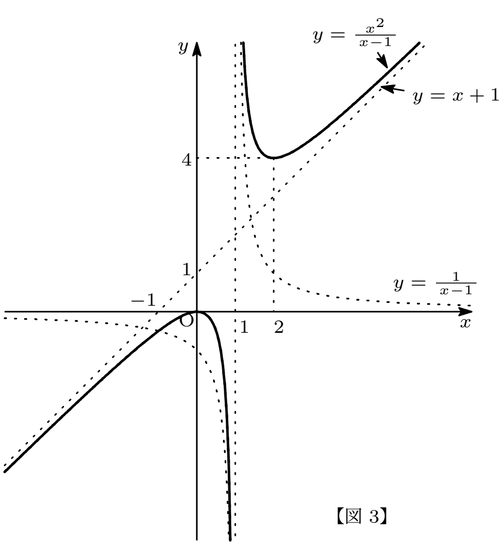
$|x|$ が非常に大きいときは $(x+1)$ に比べて $\frac{1}{x-1}$ は無視できるので $y=x+1$ は漸近線になる．実際，

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(x+1)\} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1} = 0$$

よって，$y=x+1$ は漸近線となる．また $x=1$ の近くでは $\frac{1}{x-1}$ に比べて $x+1(\quad 2)$ は無視できるので 主要部分は $\frac{1}{x-1}$．詳しく見ると

$$f(x) = x+1+\frac{1}{x-1} \quad 2+\frac{1}{x-1} \ (x \quad 1 \text{ のとき})$$

$x \quad 1$ のとき，$\frac{1}{x-1}$ は非常に大きいので 2 は無視できる．さらに極値を求めてみましょう．ここで始めて微分します．



【図 3】

$$f'(x) = 1-\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

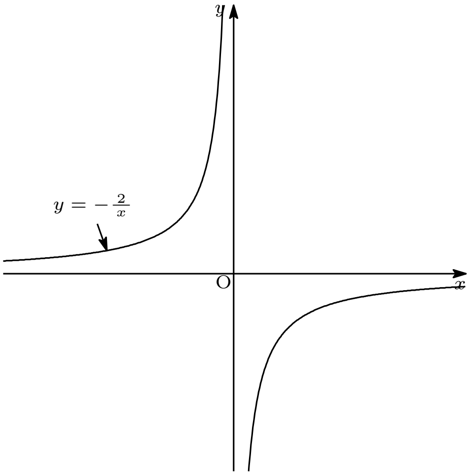
ゆえに, 極大値は 0 ($x=0$ のとき)．　極小値は 4 ($x=2$ のとき)．
厳密には増減表にするべきですが，それは 体裁を整えているだけ です．

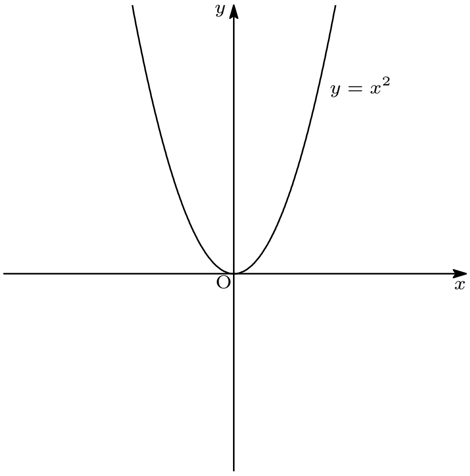
例 2　(重ね合わせ)

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$$

のグラフの概略を描け.

今度は「引き算」ですが，$y = x^2$ と $y = -\frac{2}{x}$ の「和」(重ね合わせ) と見てみます.





$|x|$ が非常に大きいときは x^2 に比べて $\frac{-2}{x}$ は無視できるので $y = x^2$ で近似されます．すなわち

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x} \quad x^2 \ (|x| \text{ が非常に大きいとき})$$

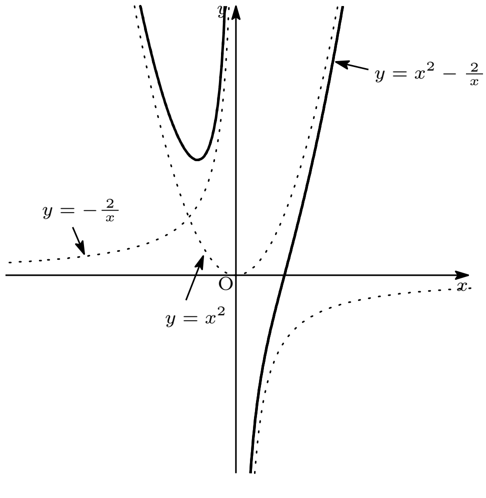
また $x = 0$ の近くでは $\frac{-2}{x}$ に比べて $x^2(\quad 0)$ は無視できるので

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x} \quad -\frac{2}{x} \ (x \quad 0 \text{ のとき})$$

さらに極値を求めてみましょう．ここで始めて微分します.

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3+1)}{x^2} = \frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^2}$$

$x = -1$ で極小になることが分かります．しかし概形は微分しなくとも求まります.



練習 1　次のグラフの 概略 を描け．ただし極値は求めなくて良い.

(1) $y = x + \frac{1}{x}$

(2) $y = x + \frac{1}{x^2}$

(3) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(4) $y = |x^2 - 4| + \frac{1}{2}x$

(5) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ 注1)

注1) [ヒント] $y = \sqrt{4 - x^2}$ は 円の上半分 ($x^2 + y^2 = 4,\ y \geqq 0$)

例 3　(2 次の分数関数 – その 1)

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2}$$

のグラフの概略を描け.

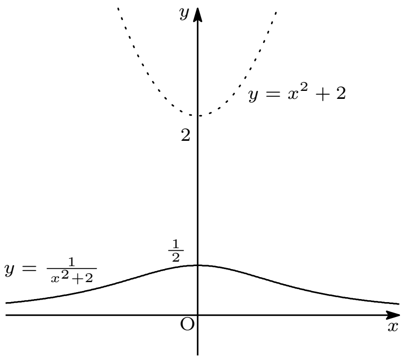
今度は「わり算」ですが，$y = \frac{1}{x^2+2}$ のグラフは $y = x^2+2$ の逆数をとると簡単に概形が描けます．そして $y = \frac{1}{x^2+2}$ のグラフの y 成分と $y = x$ のグラフの y 成分を掛けることによって，グラフの概形が描けます．このとき分母が 2 次式，分子は 1 次式ですから $|x|$ が大きいとき $f(x)$　　0 となります．実際,

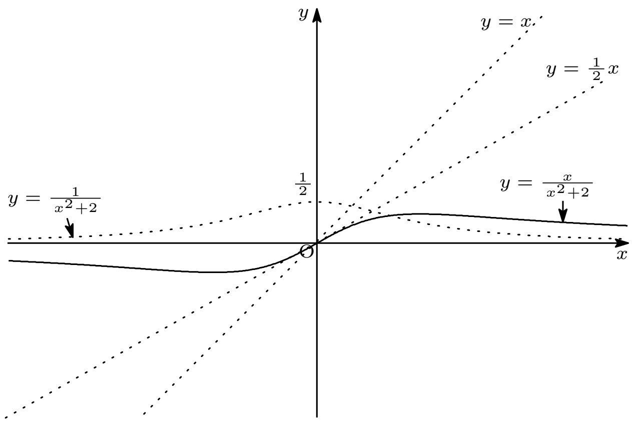
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+\frac{2}{x}} = 0$$

さらに x　　0 のときは x^2 は x に比べると非常に小さくなるので,

$$\frac{x}{x^2+2} \quad \frac{x}{2} \ (x \quad 0 \text{ のとき})$$

よって $y = \frac{x}{2}$ は $y = f(x)$ の原点における接線になっています．以上からグラフの概形が描けます.





微分すると

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+2) - x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} = \frac{-(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$$

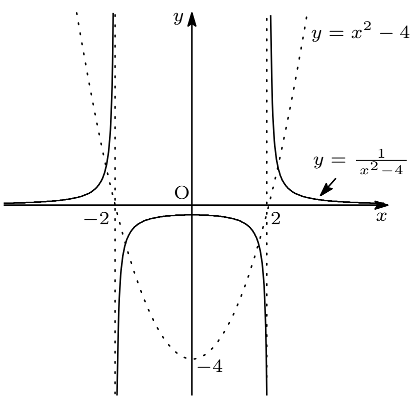
ですから，$f'(0) = \frac{1}{2}$ で原点における接線は $y = \frac{1}{2}x$, また極値は $x = \pm\sqrt{2}$ のとき取ることがわかります．しかし概形ならば微分しなくとも求まります．(実は $f(x) = \frac{1}{x+\frac{2}{x}}$ ですから $y = x + \frac{2}{x}$ のグラフを利用して描くこともできます.)

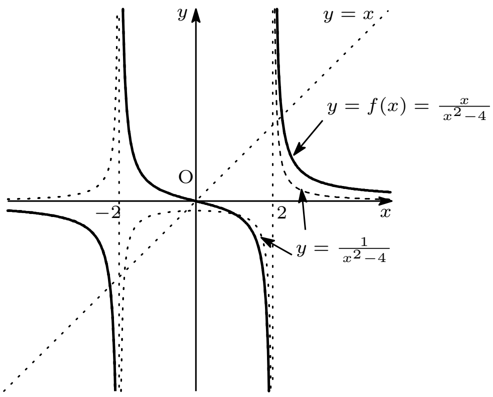
例 4　(2 次の分数関数-その 2)

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

のグラフの概略を描け.

今度は「分母が 0」になる実数が存在する場合です．$x = \pm 2$ のとき「分母が 0 で 分子が 0 でない」ので $x = \pm 2$ の近くでは $|f(x)| \to \infty$ となります．また $y = \frac{1}{x^2-4}$ の方は 比較的簡単に描くことができますが，それと $y = x$ を掛けた $f(x)$ のグラフは難しくなります．(私はときどきこれで「感じ」をつかむことがありますが $\cdots$.)





今度は極限を考えることにより グラフを描いてみましょう．分母が 2 次式，分子が 1 次式だから

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

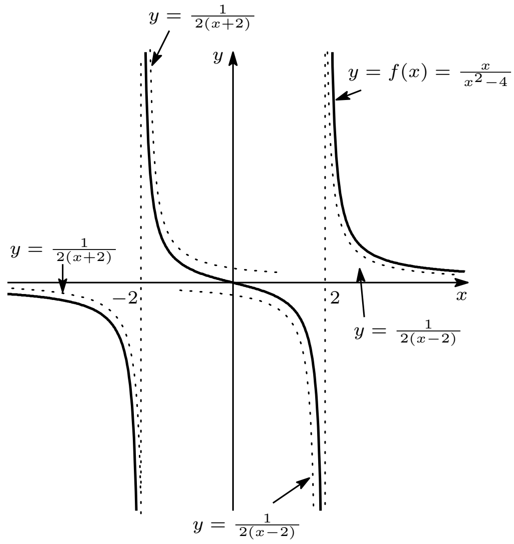
また

$$f(x) = \frac{x}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right) \quad \cdots (*)$$

であるから x　2 のとき主要部分は $y = \frac{1}{2(x-2)}$. x　(-2) のとき主要部分は $y = \frac{1}{2(x+2)}$. である．実際 $(*)$ より

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} = \frac{1}{8} \quad \cdots (**)$$

ゆえに $y = f(x)$ と $y = \frac{1}{2(x-2)}$ との距離は $x \to 2$ のとき $\frac{1}{8}$ に限りなく近づき，このとき $\frac{1}{x-2}$ は非常に大きくなっているので 主要部分は $y = \frac{1}{2(x-2)}$ といえる．$x \to -2$ のときも同様. よってグラフの概形は図のようになる.



概形だけなら微分は不要です．微分してみると

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4) - x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} < 0$$

単調減少となります．$f'(x)$ の符号の変化だけでは，グラフはとても描けません．

練習 2　次のグラフの概形を描け．ただし極値は求めなくとも良い．

(1) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

(2) $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

6.0.1　【参考】「比が等しくなること」と「差が 0 になること」の違い

例 4　では次のように考えることもできます.

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+2}\cdot\frac{1}{x-2}$$

$x \to 2$ のとき, $\frac{1}{x-2}$ **の変化に比べると** $\frac{x}{x+2}$ **は殆ど一定 (** $\quad\frac{2}{4}$**) と考えられるので**

$$f(x) = \frac{x}{x+2}\cdot\frac{1}{x-2} \overset{\text{比}}{\quad} \frac{1}{2(x-2)} \quad (x \quad 2\text{ のとき}) \qquad \cdots①$$

同様にして $x \to -2$ のとき, $\frac{1}{x+2}$ **の変化に比べると** $\frac{x}{x-2}$ **は殆ど一定 (** $\quad\frac{-2}{-4}$**) と考えられるので**

$$f(x) = \frac{x}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2} \overset{\text{比}}{\quad} \frac{1}{2(x+2)} \quad (x \quad -2\text{ のとき}) \qquad \cdots②$$

[注2)]　よって $x \quad 2$ のとき $f(x)$ と $\frac{1}{2(x-2)}$ の比は 1 に近づき, $x \quad -2$ のとき $f(x)$ と $\frac{1}{2(x+2)}$ の比は 1 に近づくので グラフの概形は分かります.

一般に

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 1 \qquad \cdots(*)$$

のとき

$$\lim_{x\to a}\{g(x)-f(x)\} = 0 \qquad \cdots(**)$$

とは限りません. $(*)$ は

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-f(x)}{f(x)} = 0$$

と書き直せるので 「$|g(x)-f(x)|$ の大きさは $|f(x)|$ に比べて無視できる」ということを表します. したがって $f(x)$ が有限のときは $(*)$ から $(**)$ が導かれます. しかし $|f(x)| \to \infty$ のときは $(*)$ が成り立っても $(**)$ が成り立つとは限りません. 実際

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{\frac{1}{2(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{(x-2)(x+2)}}{\frac{1}{2(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{2x}{x+2} = 1$$

ですが, 前頁 $(**)$ で述べたように

$$\lim_{x\to 2}\left\{f(x) - \frac{1}{2(x-2)}\right\} = \frac{1}{8}$$

注2) もう少し厳密にやると

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{x}{(x-2)(x+2)}}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$$

よって $x = 2$ の近くでは

$$f(x) \overset{\text{比}}{\quad} \frac{1}{2(x-2)} \qquad \cdots①$$

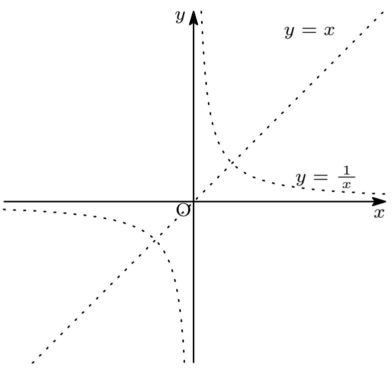
$x \to -2$ のときも同様.

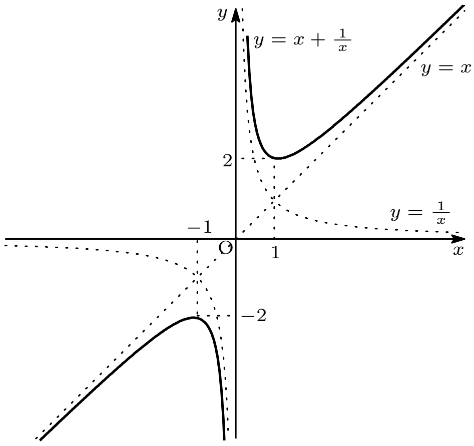
となって「$f(x) - \frac{1}{2(x-2)} \to 0$」でありません．しかし，$x \to 2$ のとき $\frac{1}{x-2}$ は非常に大きくなるのでそれに比べて $\frac{1}{8}$ は無視できます．(少なくともグラフを描く上では差はありません.) よってこの場合も x 　2 のとき主要部分は $y = \frac{1}{2(x-2)}$ といえます.

練習問題解答

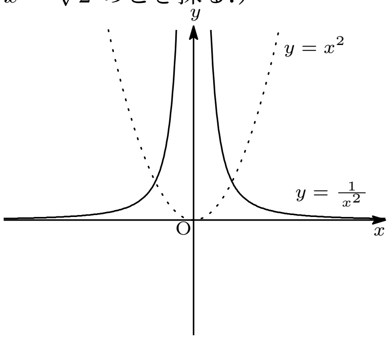
練習 1

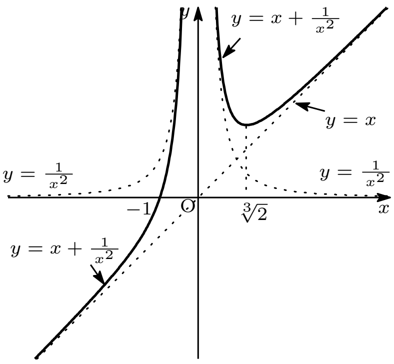
(1)$y = \frac{1}{x}$ と $y = x$ のグラフの「重ね合わせ」(y 成分の和をとる) で $y = x + \frac{1}{x}$ のグラフは右下図のようになる.（なお，$f'(x) = 1 + \frac{-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ だから，極小値は $x = \pm 1$ のとき採る.）



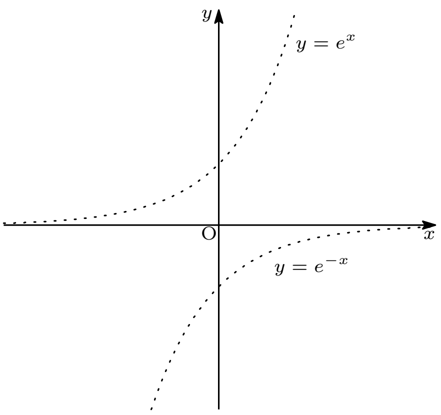


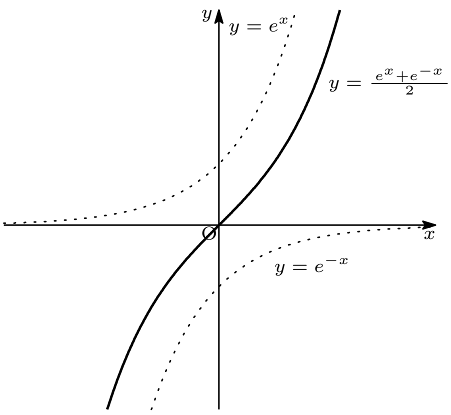
(2) $y = \frac{1}{x^2}$ は 左下のようなグラフになる．これと $y = x$ のグラフの「重ね合わせ」(y 成分の和をとる) で $y = x + \frac{1}{x^2}$ のグラフは右下図のようになる.（なお，$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{x^4} = \frac{x^3-2}{x^3}$ だから，極小値は $x = \sqrt[3]{2}$ のとき採る.）



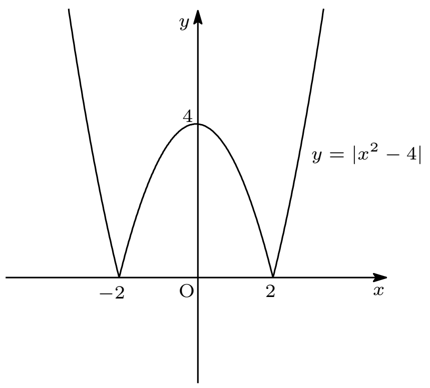


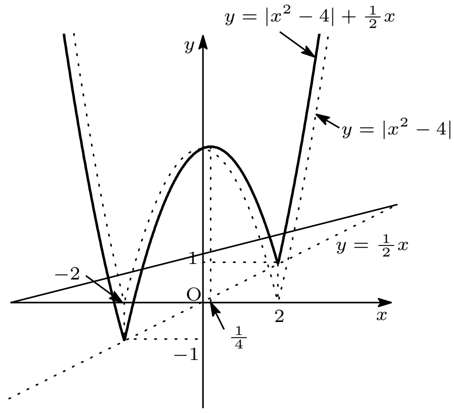
(3) $y = e^x$ と $y = -e^{-x}$ は 左下のようなグラフになる．この二つのグラフの「平均」をとって $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ のグラフは右下図のようになる.（なお，$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ だから，単調増加になる.）





(4) $y = |x^2 - 4|$ は 放物線 $y = x^2 - 4$ の $y < 0$ の部分を, x 軸に関し折り返したグラフなので, 左下図のようなグラフになる．これと $y = \frac{1}{2}x$ のグラフの「重ね合わせ」で $y = |x^2 - 4| + \frac{1}{2}x$ のグラフは右下図のようになる.

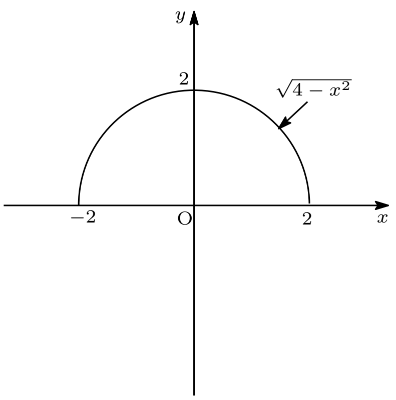


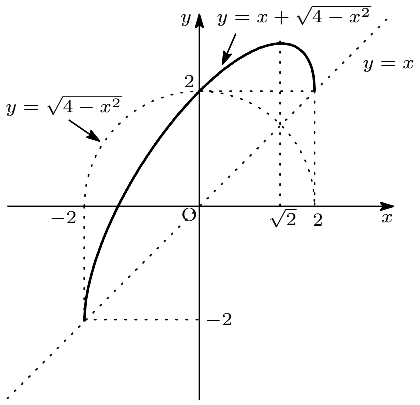


Comment

概形だけならば，微分はいりませんが，念のため極値も求めてみましょう．まず $x = \pm 2$ のときグラフは「谷底」になっているので，このとき極小になります．($x = \pm 2$ では微分可能ではありませんが減少から増加に変わる点なので，極小値を採ります.）また $-2 < x < 2$ において $f(x) = -(x^2-4)+\frac{1}{2}x = -x^2+\frac{1}{2}x+4$. そして $\left(-x^2 + \frac{1}{2}x + 4\right)' = -2x + \frac{1}{2} = 0$ の解は $x = \frac{1}{4}$. 従って「$x = \frac{1}{4}$，$x = -2$，$x = 2$ のとき 極値を採る」.

(5) $y = \sqrt{4 - x^2}$ は 円： $x^2 + y^2 = 4$ の上半分だから, 左下図のようなグラフになる．これと $y = x$ のグラフの「重ね合わせ」で $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ のグラフは右下図のようになる．





Comment

概形だけならば，微分はいりませんが，念のため極値も求めてみましょう．

$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

よって $f'(x)$ の符号も $y = \sqrt{4 - x^2}$ のグラフと $y = x$ のグラフの上下関係 から決めればよい．交点の x 成分は

$$\sqrt{4 - x^2} - x = 0 \longrightarrow 4 - x^2 = x^2 \longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

さらに $x = \sqrt{4 - x^2} \geqq 0$ より $x = \sqrt{2}$．ゆえに，極値は $x = \sqrt{2}$ のとき採る．

練習 2　次のグラフの概形を描け．(極値は求めなくとも良い)

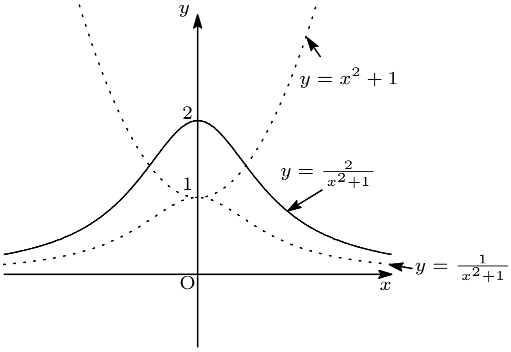
(1) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

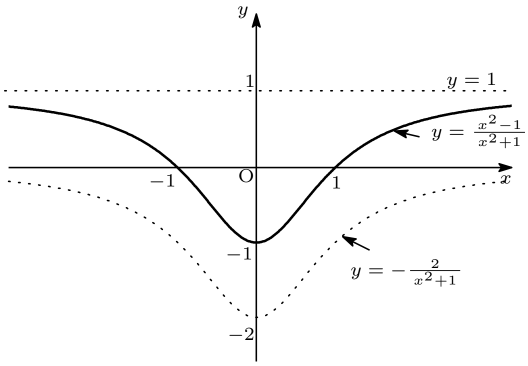
(2) $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

(1) まずは割り算して次数を下げると，

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

よって $y = f(x)$ のグラフは $y = -\frac{2}{x^2+1}$ のグラフを y 軸方向に 1 平行移動した グラフになる．$y = x^2+1$ のグラフから $y = \frac{2}{x^2+1}$ のグラフは 左下のようになる．これを x 軸に関して折り返すと $y = -\frac{2}{x^2+1}$ のグラフになり，さらにこのグラフを y 軸方向に 1 平行移動すると $y = f(x)$ のグラフが描かれる (右下図)．なお，グラフから明らかなように $x = 0$ のとき極小値 -1 をとります．

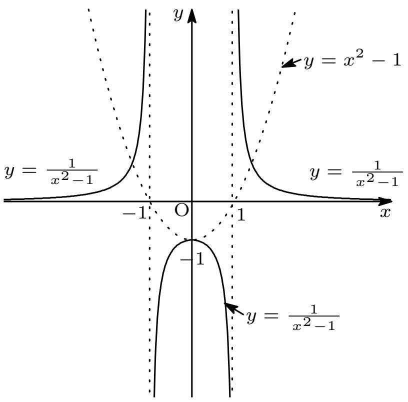


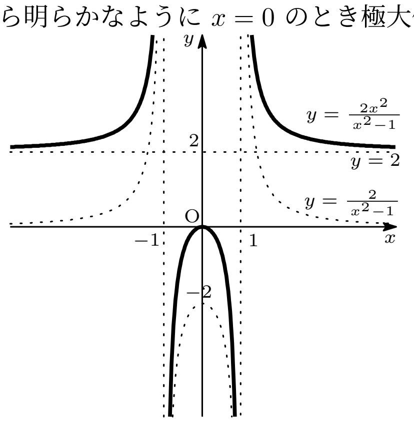


(2) まずは割り算して次数を下げると，

$$y = \frac{2x^2}{x^2-1} = 2 + \frac{2}{x^2-1} = 2 + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$y = x^2 - 1$ のグラフから，$y = \frac{1}{x^2-1}$ のグラフは左下のようになります．このグラフを y 軸方向に 2 倍拡大すると $y = \frac{2}{x^2-1}$ のグラフになり，さらに $y = \frac{2}{x^2-1}$ のグラフを y 軸方向に 2 平行移動して $y = f(x)$ のグラフが描かれます (右下図)．また グラフから明らかなように $x = 0$ のとき極大値 0 をとります．





Comment

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = 2 + \frac{2}{x^2-1} = 2 + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \qquad \cdots (*)$$

ですから $x \quad 1$ のとき

$$f(x) \quad 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{x-1}$$

$x \quad -1$ のとき

$$f(x) \quad 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{x+1}$$

すなわち，$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{x-1}$ と $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{x+1}$ は それぞれ 「$x \to 1$」,「$x \to -1$」 のときに $y = f(x)$ に漸近します.

第7章　演習

7.1　問題

まずは数列の極限です.

練習 1

次の極限を求めよ.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

練習 2

次の数列の和は収束するか? 収束するときは和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

次の 3 問は よくある問題ですが 近似式との関係が深いです.

練習 3

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}=b$$

となるような定数 a, b を 求めよ.

練習 4

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(ax+b)\right\}=0$$

となるような定数 a, b を 求めよ.

練習 5

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(ax+b)\right\}=c$$

となるような定数 a, b, c を求めよ. (琉球大)

3 次近似式がテーマですが，それを不等式を使って証明させる問題です．微分を使って極限の問題を解かせる場合は，不等式がらみが多くなります．

練習 6

(1) $x > 0$ のとき次の不等式を示せ．

$$\text{(i)}\quad x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\text{(ii)}\quad 1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ の値を求めよ．

7.2　解答

練習 1

次の極限を求めよ.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

$k=1,2,3,\cdots n$ のとき，$\frac{n}{n^2+n}\leqq\frac{n}{n^2+k}<\frac{n}{n^2}$ だから

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n}\leqq\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}<n\cdot\frac{n}{n^2}=1$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1$ だから，ハサミウチより

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=1$$

Comment

n が大きいとき $\frac{n}{n^2+k}\quad\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$ となるので

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\quad\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}=1$$

と推定できます.

練習 2

次の数列の和は収束するか? 収束するときは和を求めよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(1) n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}=-\sum_{k=1}^{n}\{\log k-\log(k+1)\}\\&=-\{(\log 1-\log 2)+(\log 2-\log 3)+(\log 3-\log 4)+\cdots+(\log n-\log(n+1)\}=\log(n+1)\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$ だから, S_n は ∞ に発散する.

(2)

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{k}{k-1}}=-\sum_{k=2}^{n}\left\{\log\frac{k}{k-1}-\log\frac{k+1}{k}\right\}\\&=-\left\{\left(\log 2-\log\frac{3}{2}\right)+\left(\log\frac{3}{2}-\log\frac{4}{3}\right)+\left(\log\frac{4}{3}-\log\frac{5}{4}\right)+\cdots+\left(\log\frac{n}{n-1}-\log\frac{n+1}{n}\right)\right\}\\&=\log\frac{n+1}{n}-\log 2\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\log\frac{n+1}{n}-\log 2\right)=-\log 2$$

Comment

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ だから n が十分大きいとき

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\ ^{\text{比}}\ \frac{1}{n}.\qquad\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\ ^{\text{比}}\ -\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は ∞ に発散し，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は有限な値に収束するので，(1) の数列が発散し，(2) の数列が収束すること

は分かる．しかしその具体的な和は，S_n を求めないと分からない．

練習 3

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1} = b$$

となるような定数 a, b を 求めよ．

「$x \to 1$ のとき (分母)$\to 0$」なので 「(分子)$\to 0$」となることが必要．ゆえに

$$\lim_{x \to 1} \left\{\sqrt{x+3}-a\right\} = 2-a = 0.$$

ゆえに $a=2$ となることが必要．このとき

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+4}-2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(\sqrt{t+4}-2)(\sqrt{t+4}+2)}{t\ (\sqrt{t+4}+2)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t}{t\ (\sqrt{t+4}+2)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t+4}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Comment

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1} = b \Longleftrightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-a-b(x-1)}{x-1} = 0$$

すなわち，$x=1$ の近くでは

$$\sqrt{x+3} \quad a+b(x-1)$$

この問題は $x=1$ の近くでの $\sqrt{x+3}$ の 1 次近似式 (接線) を求めている ことになります．実際 $y=\sqrt{x+3}$ 上の点 $(1,2)$ に於ける接線は

$$y-2 = \frac{1}{4}(x-1)$$

☜ $(\sqrt{x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ですから 「$a=2,\ b=\frac{1}{4}$」とすぐ求まります．

練習 4

$$\lim_{x \to \infty} \left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(ax+b)\right\} = 0$$

となるような定数 a, b を 求めよ．

【考え方】「$y=ax+b$」は $y=\sqrt{x^2+3x+1}$ の $x \to \infty$ に於ける漸近線です．$x \to \infty$ のとき 「$(x+\frac{3}{2})^2$ に比べると $\frac{5}{4}$ は無視できる」ので

$$\sqrt{x^2+3x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} \quad x+\frac{3}{2}$$

したがって 漸近線は $y=x+\frac{3}{2}$．よって「$a=1,\ b=\frac{3}{2}$」とすぐ求まります．ただし解答ではこれをもっと厳密に述べないといけないでしょう．なお解答では $t=\frac{1}{x}$ と置換しましたが，そのままやってもできます．

$t = \frac{1}{x}$ とおくと，「$x \to \infty$ のとき $t \to +0$」

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(ax+b)\right\} = \lim_{t\to+0}\left\{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}+1}-\frac{a}{t}-b\right\} = \lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{1+3t+t^2}-a-bt}{t}$$

「$t \to +0$ のとき (分母)$\to 0$」 なので,「(分子)$\to 0$」 が必要．よって

$$\lim_{t\to0}\{\sqrt{1+3t+t^2}-a-bt\} = 1-a = 0. \qquad \therefore a = 1 \text{ が必要.}$$

このとき 与式の左辺は

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{1+3t+t^2}-1-bt}{t} &= \lim_{t\to+0}\frac{(\sqrt{1+3t+t^2}-1-bt)(\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt)}{t(\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt)}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{((1-b^2)t^2+(3-2b)t}{t(\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt)} = \lim_{t\to0}\frac{(1-b^2)t+(3-2b)}{\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt} = \frac{3-2b}{2}\end{aligned}$$

仮定より「この値が 0」だから

$$3-2b=0. \qquad \therefore b = \frac{3}{2}$$

練習 5

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(ax+b)\right\} = c$$

となるような定数 a, b, c を求めよ．(琉球大)

【考え方】「$x \to \infty$ のとき $\{\quad\}$ 内は 0 に収束することが必要」(さもないと発散する) ので，先の例題と同様「$a=1, b=\frac{3}{2}$」とすぐ分かります．あとは極限値を求めるだけです.

$t = \frac{1}{x}$ とおくと，「$x \to \infty$ のとき $t \to +0$」

$$c = \lim_{x\to\infty} x\left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(ax+b)\right\} = \lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\cdot\left\{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}+1}-\frac{a}{t}-b\right\} = \lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{1+3t+t^2}-a-bt}{t^2}$$

「$t \to +0$ のとき (分母)$\to 0$」 なので,「(分子)$\to 0$」 が必要．よって

$$\lim_{t\to0}\{\sqrt{1+3t+t^2}-a-bt\} = 1-a = 0. \qquad \therefore a = 1 \text{ が必要.}$$

このとき 与式の左辺は

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{1+3t+t^2}-1-bt}{t^2} &= \lim_{t\to+0}\frac{(\sqrt{1+3t+t^2}-1-bt)(\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt)}{t^2(\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt)}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{((1-b^2)t^2+(3-2b)t}{t^2(\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt)} = \lim_{t\to0}\frac{(1-b^2)t+(3-2b)}{t(\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt)} \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

「$t \to +0$ のとき (分母)$\to 0$」 なので,「(分子)$\to 0$」 が必要．よって

$$3-2b=0. \qquad \therefore b = \frac{3}{2} \text{ が必要.}$$

このとき $(*)$ より

$$c = \lim_{t\to0}\frac{(1-b^2)t+(3-2b)}{t(\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt)} = \lim_{t\to0}\frac{(1-b^2)}{\sqrt{1+3t+t^2}+1+bt} = \frac{1-b^2}{2} = -\frac{5}{8}.$$

Comment

解答の 2 行目から

$$c = \lim_{t \to +0} \frac{\sqrt{1+3t+t^2} - a - bt}{t^2} \iff \lim_{t \to +0} \frac{\sqrt{1+3t+t^2} - a - bt - ct^2}{t^2} = 0$$

よって 結局は $\sqrt{1+3t+t^2}$ の $t = 0$ の近くにおける 2 次近似を求める問題になります.「$a = 1, b = \frac{3}{2}, c = -\frac{5}{8}$」ですから $t \quad 0$ のとき,

$$\sqrt{1+3t+t^2} \quad 1 + \frac{3}{2}t - \frac{5}{8}t^2$$

を表しています.

練習 6

(1) $x > 0$ のとき次の不等式を示せ.

$$\text{(i)} \quad x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\text{(ii)} \quad 1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ の値を求めよ.

【考え方】$\cos x, \sin x$ の $x = 0$ の近くでの近似式「$\cos x \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$」,「$\sin x \quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$」から作成された問題です. 何度も微分していくだけです. この証明は**「3 次近似式の別証明」**になります.

(1) $F(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) - \sin x$ とおくと

$$F'(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) - \cos x, \qquad F''(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right),$$

$$F'''(x) = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right), \qquad F^{(4)}(x) = x - \sin x$$

$x > 0$ において $x > \sin x$ だから $F^{(4)}(x) > 0$. ゆえに $x > 0$ において $F'''(x)$ は単調増加となるので

$$x > 0 \text{ のとき} \qquad F'''(x) > F'''(0) = 0$$

よって $x > 0$ のとき $F'''(x) > 0$ となり, $F''(x)$ は単調増加となるので

$$x > 0 \text{ のとき} \qquad F''(x) > F''(0) = 0$$

よって $x > 0$ のとき $F''(x) > 0$ となり, $F'(x)$ は単調増加となるので

$$x > 0 \text{ のとき} \qquad F'(x) > F'(0) = 0$$

よって $x > 0$ のとき $F'(x) > 0$ となり, $F(x)$ は単調増加となるので

$$x > 0 \text{ のとき} \qquad F(x) > F(0) = 0$$

「$F'(x) > 0$ と $F'''(x) > 0$」から (i) が, また「$F(x) > 0$ と $F''(x) > 0$」から (ii) が証明された. Q.E.D.

(2) $x > 0$ のとき

$$\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} < x - \sin x < \frac{x^3}{3!}$$

各辺を x^3 で割って

$$\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} < \frac{x - \sin x}{x^3} < \frac{1}{3!}$$

「$x \to +0$ のとき $\frac{x^2}{5!} \to 0$」 だから，ハサミウチより

$$\lim_{x \to +0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$x \to -0$ のときは, $-x = y$ とおくと

$$\lim_{x \to -0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{y \to +0} \frac{(-y) - \sin(-y)}{(-y)^3} = \lim_{y \to +0} \frac{y - \sin y}{y^3} = \frac{1}{6}$$

右極限と左極限が一致するので

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$