# 目次


**11 行列** 2

11.1 行列の定義 . . . . . 2

11.2 基本的な計算 . . . . . 3

11.3 行列の $n$ 乗 . . . . . 4

11.4 行列の $n$ 乗計算のプログラミング . . . . . 8

11.5 固有値と固有ベクトル . . . . . 11

11.6 対角化 . . . . . 14

11.6.1 1 次独立な固有ベクトルが 2 つあるとき . . . . . 14

11.6.2 1 次独立な固有ベクトルが 1 つしかないとき . . . . . 16

# 11　行列

行列の基本計算

| | |
|---|---|
| 行列の定義 | `matrix()` |
| 行列の和, 差, 積 | +, −, ∗ |
| $A$ の逆行列 | `A ^ (-1)` または `1/A` |

以下は参考です。

| | |
|---|---|
| $A$ の固有方程式 (変数 $x$ のとき) | `linalg :: charpoly(A, x)` |
| $A$ の固有値 | `linalg :: eigenvalues(A)` |
| $A$ の固有ベクトル | `linalg :: eigenvectors(A)` |
| $A$ の対角化 | `linalg :: jordanForm(A)` |

## 11.1　行列の定義

行列の定義は matrix([[第一行], [第 2 行], $\cdots$ , [第 $n$ 行]]) のようにします。

| | |
|---|---|
| $(2, 5)$ | `matrix([[2, 5]])` |
| $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ | `matrix([[3], [4]])` |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ | `matrix([[1, 2], [3, 4]])` |
| $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ | `matrix([[a, b], [c, d]])` |

一番外側の [ ] はリストを表し，要素が，この順に並ぶことを表しています。[注1] matrix([[2,5]] は要素 (行) がひとつ ([2,5] だけ) なので行ベクトルになります。一方，matrix([[3],[4]]) は要素が 2 つあるので列ベクトルになります。[注2]

行列に名前をつけるのも, 数式に名前をつけるのと同様です。「名前:= 定義式;」で定義します。このとき名前として E と I(ai) は, $e$(自然対数の底),$i$(虚数単位) として MuPAD が使用しますので使えません。例えば, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に A と名前をつけるのは，次のようにします。

- `A := matrix([[1, 2], [3, 4]]);`　　>> $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ も, 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ も自分で定義します。

- `E := matrix([[1, 0], [0, 1]]);`　　>> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- `O := matrix([[0, 0], [0, 0]]);`　　>> $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

注1)　これに対し { } は集合を表し, 要素の順番を考えません。

注2)　matrix([a,b]) と書いても [ ] の中の要素は a と b の 2 つあるので，MuPAD のほうで勝手に [a],[b] の意味だと解釈し，やはり列ベクトルになります。

## 11.2　基本的な計算

行列の加減乗除は実数と同じ様に計算できます。A の逆行列は 1/A でも A ^ (−1) でも計算できます。[注3) ]また逆行列が存在しないときは FAIL というエラーがでます。

- `u` := `matrix`([[1, 2]])　　>> $(1, 2)$　　$\cdots \overrightarrow{u}$ の定義
- `v` := `matrix`([[2], [3]])　　>> $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　$\cdots \overrightarrow{v}$ の定義
- `u` ∗ `v`;　　>> 8　　$\cdots \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8$
- `v` ∗ `u`;　　>> $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　　$\cdots \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
- `A` := `matrix`([[1, 2], [3, 4]]);　　>> $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　　$\cdots$ A の定義
- `B` := `matrix`([[1, 2], [−1, −2]]);　　>> $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$　　$\cdots$ B の定義
- `2` ∗ `A` + `3` ∗ `B`;　　>> $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　　$\cdots$ 2A+3B
- `A` ∗ `B`;　　>> $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$　　$\cdots$ AB
- `B` ∗ `A`;　　>> $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$　　$\cdots$ BA
- `A ^ (−1)`;　　>> $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　$\cdots \mathrm{A}^{-1}$
- `1/A`;　　>> $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　$\cdots \mathrm{A}^{-1}$
- `B ^ (−1)`;　　>> $FAIL$　　$\cdots \mathrm{B}^{-1}$ はない
- `A` ∗ `A ^ (−1)`;　　>> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　$\cdots \mathtt{AA}^{-1} = \mathtt{E}$
- `A ^ 2`;　　>> $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$　　$\cdots \mathrm{A}^2$
- `A ^ 2` ∗ `B`;　　>> $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -7 & -14 \end{pmatrix}$　　$\cdots \mathrm{A}^2 B$
- `A ^ n`;　　>> Error:not a positive multiple [(Dom::Matrix(Dom::ExpressionField()))
  ::_power]　　$\cdots \mathrm{A}^n$

一般には行列では AB≒BA でしたね。また $det(B) = 1 \times (-2) - 2 \times (-1) = 0$ ですから B の逆行列は存在しません。[注4) ]残念ながら，行列の $n$ 乗は計算できないみたいです。

なお，成分が文字の行列も計算できます。ただこのときは，ちょっと注意が必要です。いま仮に行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と定義したいとします。しかし先に $a, b, c, d$ をなんらかに定義していた場合は，エラーが出るこ

---

注3)　もちろん学校では 1/A は使わないでください。

注4)　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $det(A) = ad - bc$ と定義して $A$ の行列式 (*determinant*) といいます. $det(A) = 0$ のとき $A^{-1}$ は存在しません。$det(A) \fallingdotseq 0$ のとき $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ です。

ともあります。このような時は delete(); で，その定義を先に消去しておきます。何も定義していないときはもちろん delete(); する必要はありません。

- `delete(a) : delete(b) : delete(c) : delete(d);` >> $\cdots a, b, c, d$ の定義の消去
- `A := matrix([[a,b],[c,d]]);` >> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\cdots$ A の定義
- `e := matrix([[1,0],[0,1]]);` >> $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\cdots$ e(単位行列) の定義
- `A * e;` >> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\cdots AE = A$
- `e * A;` >> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\cdots EA = A$
- `1/A;` >> $\begin{pmatrix} -\frac{d}{-ad+bc} & \frac{b}{-ad+bc} \\ \frac{c}{-ad+bc} & -\frac{a}{-ad+bc} \end{pmatrix}$ $\cdots A^{-1}$

本当は $ad - bc = 0$ のときは逆行列は存在しないはずですが MuPAD はとりあえずこの式を出してきます。注5)

お次はケーリー・ハミルトンの定理の検証です。

- `A ^ 2 - (a + d) * A + (ad - bc)e;` >> $\begin{pmatrix} ad - bc + bc - a(a+d) + a^2 & ab + bd - b(a+d) \\ ac + cd - c(a+d) & ad - bc + bc - d(a+d) + d^2 \end{pmatrix}$
- `simplify(%);` >> $\begin{pmatrix} ad - bc - ad + bc & 0 \\ 0 & ad - bc - ad + bc \end{pmatrix}$

明らかに

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = \begin{pmatrix} ad - bc - ad + bc & 0 \\ 0 & ad - bc - ad + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \qquad \cdots (*)$$

と簡単に出来るはずですが MuPAD はそこまでやってくれません。「そのくらい自分でやれ」ということでしょうか？
このように文字が入っているときは自分で確かめてみることが必要です。MuPAD も万能ではないので注意しましょう。

## 11.3　行列の $n$ 乗

行列の $n$ 上は非常に多く入試に出題されています。しかし，第 2 節の最後の例で見たように MuPAD では $n$ が文字のとき，$A^n$ は計算できません。そこでここでは参考書にある「整式の剰余」を利用した方法で手動で求めてみます。

注5) しかし factor(%); とすると Error: がでます。遅ればせながらエラーに気づいたというところでしょうか。

**例題 1**

$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^n$ ($n$ は自然数) について次の問いに答えよ。

(1) $A^2-7A+10E=O\cdots(*)$ が成り立つことを示せ。

(2)$f(x)$ を $x^2-7x+10$ で割ったときの余りを求めよ。

(3)$A^n$ を求めよ。

**【解答】**

(1)(略) ケーリー・ハミルトンの定理より明らか。

注6)

(2)$x^2-7x+10$ は 2 次式なので余りは $px+q(p,q$ 定数) とおける。さらに商を $g(x)$ とおくと

$$f(x)=(x^2-7x+10)g(x)+px+q=(x-2)(x-5)g(x)+px+q \qquad \cdots①$$

① に $x=2, x=5$ を代入して

$$\begin{cases} f(2)=2^n=2p+q \\ f(5)=5^n=5p+q \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p=\frac{5^n-2^n}{3} \\ q=\dfrac{5\cdot 2^n-2\cdot 5^n}{3} \end{cases}$$

よって求める余りは

$$\frac{5^n-2^n}{3}x+\frac{5\cdot 2^n-2\cdot 5^n}{3} \qquad \cdots(答)$$

(3) ① で $x$ に $A$ を代入して

$$f(A)=A^n=(A^2-7A+10E)g(A)+pA+qE \qquad \cdots②$$

(1) より $A^2-7A+10E=O$ だから

$$\begin{aligned} A^n &= pA+qE \\ &= \frac{5^n-2^n}{3}A+\frac{5\cdot 2^n-2\cdot 5^n}{3}E \\ &= \frac{5^n-2^n}{3}\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}+\frac{5\cdot 2^n-2\cdot 5^n}{3}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^n+2\cdot 2^n & 5^n-2^n \\ 2\cdot 5^n-2\cdot 2^n & 2\cdot 5^n+2^n\end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \cdots(答)$$

注7)

---

注6) 試験のときはもちろん実際に計算したふりをしてください。

注7) ① の $x$ に $A$ を代入するときに 実数の 1 を単位行列 E に変えるのを注意してください。このように 1 変数 $x$ のみの整式には行列 $A$ を代入してもかまいません。例えば,

$$(x+2)+(3x+1)=4x+2 \Longrightarrow (A+2E)+(3A+E)=4A+3E$$
$$x(x+2)+1=x^2+2x+1 \Longrightarrow A(A+2E)+E=A^2+2A+E$$

しかし一般に，2 変数 $x,y$ の整式に，行列 $A,B$ を代入することはできません。

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \Longrightarrow (A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \text{ (これは誤り)}$$

一般に $AB \fallingdotseq BA$ ですから，$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ から簡単に出来ません。

これを MuPAD でやらせるにはどうすればよいでしょう？じつは MuPAD にはケーリー・ハミルトンの多項式 (固有多項式) を作るコマンドはあります。[注8)] しかし $n$ が自然数のとき $x^n$ を多項式で割った余りを求めることは出来ません。[注9)] そこで我々のほうで解を求める手順を作る必要があります。いま $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式:

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0 \qquad \cdots (*)$$

の 2 解を $\alpha, \beta$ とします。$f(x) = x^n$ を $(*)$ で割ったときの商を $g(x)$, 余りを $px + q$ とおくと,

$$f(x) = \{x^2 - (a+d)x + (ad - bc)\}g(x) + px + q$$

(i) **$\alpha \fallingdotseq \beta$ のとき,** 上の式に $\alpha, \beta$ を代入して

$$\begin{cases} f(\alpha) = \alpha^n = p\alpha + q & \cdots ① \\ f(\beta) = \beta^n = p\beta + q & \cdots ② \end{cases}$$

①,② より

$$p = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad q = \frac{\alpha \cdot \beta^n - \beta \cdot \alpha^n}{\alpha - \beta}$$

ここで $\alpha - \beta \fallingdotseq 0$
☜ を使ったことに注意。

ゆえに

$$f(x) = \{x^2 - (a+d)x + (ad - bc)\}g(x) + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}x + \frac{\alpha \cdot \beta^n - \beta \cdot \alpha^n}{\alpha - \beta} \qquad \cdots ③$$

$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ だから③ に $A$ を代入すると

$$A^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}A + \frac{\alpha \cdot \beta^n - \beta \cdot \alpha^n}{\alpha - \beta}E$$

(ii) **$\alpha = \beta$ のとき,** $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = (x - \alpha)^2$ となるから，③ は

$$f(x) = x^n = (x - \alpha)^2 g(x) + px + q \qquad \cdots ③'$$

両辺を $x$ で微分して

$$f'(x) = nx^{n-1} = 2(x - \alpha)g(x) + (x - \alpha)^2 g'(x) + p \qquad \cdots ④$$

③',④ へ $\alpha$ を代入して

$$\begin{cases} \alpha^n & = p\alpha + q & \cdots ⑤ \\ n\alpha^{n-1} & = p & \cdots ⑥ \end{cases}$$

よって

$$p = n\alpha^{n-1}, \ q = (1 - n)\alpha^n$$

⑥ へ代入して

$$f(x) = (x - \alpha)^2 g(x) + n\alpha^{n-1}x + (1 - n)\alpha^n \qquad \cdots ⑦$$

---

注8) linalg::charpoly()−characteristic polynomial (固有多項式)

注9) 整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割った余り (remain) を求めるのは divide(f(x),g(x),Rem) ですが残念ながら $n$ は扱えません。

$(A-\alpha)^2 = A^2-(a+d)A+(ad-bc)E = O$ だから⑦ に $A$ を代入すると

$$A^n = n\alpha^{n-1}A + (1-n)\alpha^n E$$

以上まとめると

$$\begin{cases} \text{(i) } \alpha \fallingdotseq \beta \text{のとき，} & A^n = \dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A + \dfrac{\alpha\cdot\beta^n-\beta\cdot\alpha^n}{\alpha-\beta}E \\ \text{(ii) } \alpha=\beta \text{のとき，} & A^n = n\alpha^{n-1}A+(1-n)\alpha^n E \end{cases} \qquad \cdots(**)$$

ここで $\alpha,\beta$ は

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0 \qquad \cdots(*)$$

の２解でした。$(*)$ を固有方程式，$(*)$ の解を固有値といいます。幸いにして MuPAD には固有値を求めるコマンドがあります。linalg::eigenvalues(x) です。[注10)]
それでは $(**)$ の結果を使って例題１ (3) を解いてみましょう。次のようにします。

- `A := matrix([[3, 1], [2, 4]]);` >> $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ $\cdots A$ の定義
- `e := matrix([[1, 0], [0, 1]]);` >> $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\cdots$ 単位行列の定義
- `linalg :: eigenvalues(A);` >> $\{2, 5\}$ $\cdots$ これが固有値

そこで，$\alpha=5, \beta=2$ として $(**)$ に代入すると，

- `(5 ^ n - 2 ^ n)/(5 - 2) * A + (5 * 2 ^ n - 2 * 5 ^ n)/(5 - 2) * e;` >> $\begin{pmatrix}\frac{2\cdot2^n}{3}+\frac{5^n}{3} & -\frac{2^n}{3}+\frac{5^n}{3}\\ -\frac{2\cdot2^n}{3}+\frac{2\cdot5^n}{3} & \frac{2^n}{3}+\frac{2\cdot5^n}{3}\end{pmatrix}$

例題１の解答と同じにするには factor(); を使います。

- `factor(%);` >> $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot2^n+5^n & -2^n+5^n\\ -2\cdot2^n+2\cdot5^n & 2^n+2\cdot5^n\end{pmatrix}$

確かに，同じになりました。こんどは $\alpha=\beta$ となる場合をやって見ましょう。

**例題 2**

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ とするとき, $A^n$ ($n$ は自然数) を求めよ。

これを公式 $(**)$ を使って MuPAD でやってみます。

- `A := matrix([[1, -1], [4, 5]]);` >> $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ $\cdots A$ の定義
- `e := matrix([[1, 0], [0, 1]]);` >> $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\cdots E$ の定義
- `linalg :: eigenvalues(A);` >> $\{3\}$ $\cdots$ これが固有値

注10) linalg は linear algebra(線形代数 – 行列などを大学ではこう呼びます) の略で，eigen はドイツ語で ’ 固有の’ という意味です。values はもちろん’ 値’ という意味です。固有値は普通２個以上あるので複数形になっています。

そこで，$\alpha = 3$ として (**) に代入すると，

- $\mathtt{n * 3^{n-1} * A + (1-n) * 3^n * e;}$ $\quad >> \begin{pmatrix} n\cdot 3^{n-1} + 3^n(-n+1) & -n\cdot 3^{n-1} \\ 4n\cdot 3^{n-1} & 5n\cdot 3^{n-1} + 3^n(-n+1) \end{pmatrix}$

こんどは factor(%) や simplify(%) を使っても余り簡単になりません。手動で簡単にすると

$$A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3-2n & -n \\ 4n & 2n+3 \end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答})$$

☜ちょっと検算してみましょう。同じやり方でやってもつまらないので, 二項定理;

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

を使ってみます。まずケーリー・ハミルトンの式から

$$A^2 - 6A + 9E = 0 \Longleftrightarrow (A-3E)^2 = 0$$

つぎに $B = A - 3E = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ とおくと $A = 3E + B$ で $B^2 = O$ です。二項定理より

$$A^n = (B+3E)^n = {}_n\mathrm{C}_0(3E)^n + {}_n\mathrm{C}_1(3E)^{n-1}B + {}_n\mathrm{C}_2(3E)^{n-2}B^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n B^n$$

ここで $B^2 = O$ より，第 3 項以降はすべて $O$ となるから

$$\begin{aligned} A^n &= (3E)^n + n(3E)^{n-1}B = 3^nE + n\cdot 3^{n-1}B = 3^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\cdot 3^{n-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3-2n & -n \\ 4n & 2n+3 \end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

確かに一致しています。$\alpha = \beta$ の場合は，二項定理を使ったほうが,（剰余を利用するより）若干，楽に出来ますね。

## 11.4　行列の $n$ 乗計算のプログラミング

前節でも MuPAD をつかって $A^n$ が求まることは解りましたが，やや面倒です。このように同じ手続きを繰り返し利用したい際に，コンピュータではプログラミングというのをやります。プログラミングの基礎知識に関してはここでは省略しますが，BASIC と同じようにプログラミングするだけです。[注11)]
さて，とりあえず次のようにプログラミングすると njo_matrix(A); で A の $n$ 乗を計算することが出来ます。入力はちょっと面倒です。1 行目には ';' をつけないでください。最後の行は';' でも':' でも大丈夫です。代入は'=' でなく':=' を使ってください。また改行するときは，Shift キーを押しながら Return キーを押さないと，Error になります。[注12)]

---

[注11)] MuPAD のプログラミングについて興味がある人は •「はじめての MuPAD」赤間世紀著，Springer 出版 (¥2400) を見るか，お金を出したくない人は，示野　信一氏が
http://www.xmath.ous.ac.jp/ shimeno/mupad.html
でコンパクトな解説 (プログラミングは p51〜) を書いておられます。さらに詳しく知りたい人は toolbar⟶Help⟶Brouse Manual を見ましょう。ただで，しかも英語の勉強にもなります!?

[注12)] njo_matrix とは勝手に私がつけた名前です。自分の好きな名前に変えて大丈夫です。

```
njo_matrix := proc(x : Dom :: MatrixGroup(2, 2))
local a, b, e, koyuuti;
begin
e := matrix([[1, 0], [0, 1]]);
koyuuti := linalg :: eigenvalues(x);
if(nops(koyuuti) = 2) then
a := koyuuti[1];
b := koyuuti[2];
print(factor(simplify((a ^ n − b ^ n)/(a − b) ∗ x + (a ∗ b ^ n − b ∗ a ^ n)/(a − b) ∗ e)));
else a := koyuuti[1];
print(factor(simplify(n ∗ a ^ (n − 1) ∗ x + (1 − n) ∗ a ^ n ∗ e)));
end_if :
end_proc :
```

説明します。

```
njo_matrix := proc(x : Dom :: MatrixGroup(2, 2))
```

njo_matrix という名前で 1 変数の関数を定義します。後ろの : Dom::MatrixGroup(2,2) というのは「もし x が $2 \times 2$ 行列でないときはエラーにする」という意味で, proc(x) だけでも大丈夫です。このとき後ろに';' はつけません。';' は「ここで実行せよ」という意味なので実行するものがなくエラーになります。次の

```
local a, b, e, koyuuti;
```

は a,b,e,koyuuti を変数として宣言しておきます。BASIC と違い，プログラミングでは先に宣言しておくのが普通です。local というのは local 変数という意味で他のプログラムで参照しない変数という意味です。[注13)]

begin から end_proc までの間が *Body* といってプログラムの本体です。ここにはいくつかの制御文 ( if 文, for 文,while 文,repeat 文などのように，場合わけと繰り返しを制御する文) と関数を書きます。要するに中に書いた文を, 制御文に従いつつ順に実行していくだけです。

```
e := matrix([[1, 0], [0, 1]]);
koyuuti := linalg :: eigenvalues(x)
```

単位行列を e とし，koyuuti に固有値を代入します。

```
if(nops(koyuuti) = 2) then
a := koyuuti[1];
b := koyuuti[2];
print(factor(simplify((a ^ n − b ^ n)/(a − b) ∗ x + (a ∗ b ^ n − b ∗ a ^ n)/(a − b) ∗ e)));
```

注13) これに対し，他のプログラムでも利用したい変数を global 変数といい save a; などと書きます。

は「もし固有値が 2 つあるなら a,b に固有値の 2 個の値を代入して $A^n$ を画面に表示せよ。」という意味です。このときの $A^n$ の式はもちろん前節 (∗∗) の $\alpha \fallingdotseq \beta$ の場合の式に代入します。なお，nops() というのは number of operands の略で要素の数を返します。linalg::eigenvalues() は固有値の集合 koyuuti を返してきます。koyuuti[1],koyuuti[2] でその第 1 要素と, 第 2 要素を取り出しています。

```
else a := koyuuti[1];
print(factor(simplify(n * a ^ (n - 1) * x + (1 - n) * a ^ n * e)));
end_if
```

もし固有値が 1 つしかないときは，else 以下 end_if までを実行します。すなわち,「a に固有値を代入して $A^n$ を画面に表示せよ。」このときの $A^n$ の式はもちろん前節 (∗∗) の $\alpha = \beta$ の場合の式に代入します。

ここで使った制御文を if 文といって

if (条件文) then(命令$_{真}$) else (命令$_{偽}$) end_if

「もし (条件文) が真ならば，(命令$_{真}$) を実行して終わる。もし真でないならば，(命令$_{偽}$) を実行して終わる」という風に使います。[注14)]

これで，njo_matrix(A) とやると 2×2 行列の $n$ 乗が計算できます。まずは例題 1 の行列からです。

- A := matrix([[3, 1], [2, 4]]); $>> \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- njo_matrix(A); $>> \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n + 5^n & -2^n + 5^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n & 2^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}$

確かに同じになりました。次は例題 2 の行列です。

- A := matrix([1, −1], [4, 5]); $>> \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
- njo_matrix(A); $>> \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3n \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^n(-n+1) & -n \cdot 3^n \\ 4n \cdot 3^n & 5n \cdot 3^n + 3 \cdot 3^n(-n+1) \end{pmatrix}$

やや表現は違いますが，これは，プログラムでは最後に factor を効かせているからです。

このようにプログラムすると計算は楽ですが，最初に入力するのが大変ですね。せっかく入力したプログラムは是非保存しておきたいものです。しかし MuPAD Pro のほうは自分で書いたコマンドを保存できるらしいですが，MuPAD Light ではそれが出来ません。でも方法はあります。

tool bar の一番左の [file] から **Save As** を選んで適当な名前で, 適当なところに保存します。これは自動的に Text file [注15)] になるので，次回は「メモ帳」か何かで大事なところをコピーして MuPAD に貼り付けます。毎回これをやるのはちょっと面倒ですが，ただで使うためには多少の不便は仕方ありません。

---

注14) 実は条件文は入れ子にも出来るし, また else 以下を省くことも出来ます。

注15) 一番基本的なデータ形式。全てのワープロ, エディターで開ける。

## 11.5　固有値と固有ベクトル

**– この節以降，例題は全て入試問題レベルであるが，説明は, 高校の範囲をやや超える–**

実は行列の $n$ 乗の求め方は色々あります。次の例題を見てください。

**例題 3**

2 次の正方行列 $A$ は,

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdots ①,\quad A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdots ②$$

をみたしている。
$n$ を自然数とするとき，$A^n$ を求めよ。

一般に行列 $A$，列ベクトル $\overrightarrow{x}$ にたいし

$$A\overrightarrow{x}=k\overrightarrow{x},\ \text{かつ}\overrightarrow{x}\fallingdotseq\overrightarrow{0}$$

が成り立つとき，$k$ を固有値，$\overrightarrow{x}$ を $A$ の固有値 $k$ に対する固有ベクトルといいます。上の例では $A$ の固有値は $\{2,-2\}$, 固有値 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, 固有値 $(-2)$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ となります。このようなベクトルを求めると $A^n$ はすぐに求まります。

**【解答】**

① の両辺に $A$ をかけて,

$$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2\cdot 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

さらにこの両辺に $A$ をかけて

$$A^3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^2\cdot 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

同様にして, $n=1,2,3\cdots$ のとき

$$A^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n\\2^{n+1}\end{pmatrix}\qquad\cdots ③$$

同様にして，② より

$$A^n\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3(-2)^n\\4(-2)^n\end{pmatrix}\qquad\cdots ④$$

③,④ をまとめて書くと

$$A^n\begin{pmatrix}1 & \vdots & 3\\2 & \vdots & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & \vdots & 3(-2)^n\\2^{n+1} & \vdots & 4(-2)^n\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore A^n &= \begin{pmatrix} 2^n & 3(-2)^n \\ 2^{n+1} & 4(-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 3(-2)^n \\ 2^{n+1} & 4(-2)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \cdot 2^n + 6(-2)^n & 3 \cdot 2^n - 3(-2)^n \\ -4 \cdot 2^{n+1} + 8(-2)^n & 3 \cdot 2^{n+1} - 4(-2)^n \end{pmatrix} \qquad \cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

このように簡単にもとまります。$A$ を求める必要はありません。[注16] ということは，1 次独立な [注17] 固有ベクトルが 2 つ求まれば $A^n$ も簡単に求まるということです。さて，$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ の固有値と固有ベクトルを求めるには次のようにします。

いま $A\overrightarrow{x} = k\overrightarrow{x}$ とすると

$$
(A - kE)\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots①
$$

ここで $(A - kE)$ が逆行列を持つとすると，それを両辺にかけて

$$
\overrightarrow{x} = (A - kE)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となり $\overrightarrow{x} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$ をみたさない。よって $(A - kE)$ は逆行列を持たないことが必要で

$$
\begin{aligned}
det(A - kE) = det \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} = (a-k)(d-k) - bc = 0 \qquad \cdots②\\
\iff k^2 - (a+d)k + (ad - bc) = 0
\end{aligned}
$$

すなわち固有値 $k$ は

$$
x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0 \qquad \cdots③
$$

の解となることが必要です。③ を固有方程式といいます。逆に $k$ が③ の解のとき，① をみたすベクトル $\overrightarrow{x}$ が存在することを示しましょう。$\overrightarrow{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ とすると

$$
① \iff \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

ここで $a-k, b, c, d-k$ の全てが 0 とすると，$\overrightarrow{x}$ は任意のベクトルを取ればよい。$a-k, b, c, d-k$ のうち 0 でないものがあるとすると，② より

$$
\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d-k \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

---

[注16] ちなみに①,② より

$$
A \left(\begin{array}{c:c} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} 2 & -6 \\ 4 & -8 \end{array}\right)
$$

ですから

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -16 & 10 \end{pmatrix} \text{ となります。}
$$

[注17] $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が 1 次独立というのは $\overrightarrow{a} \fallingdotseq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{b} \fallingdotseq \overrightarrow{0}$ でかつ $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行でないという事です。

であるから,$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} d-k \\ -c \end{pmatrix}$, または $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -b \\ a-k \end{pmatrix}$ とすれば, $a-k, b, c, d-k$ は全て 0 ではないから, この場合も ① をみたすベクトル $\overrightarrow{x}$ が存在する。ただし $\begin{pmatrix} d-k \\ -c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -b \\ a-k \end{pmatrix}$ がともに $\overrightarrow{0}$ でないときは $(a-k)(d-k)-bc = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} d-k \\ -c \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} -b \\ a-k \end{pmatrix}$ となるので, このとき 1 次独立なベクトルは (その $k$ の値に対しては) 一組だけしかない。

以上から ③ の解を $k$ とすると必ず $k$ に対する固有ベクトルが少なくとも 1 つ存在することが証明されました。

では, 実際に, 固有値と固有ベクトルを求めてみましょう。

**例題 4**

$A = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -16 & 10 \end{pmatrix}$ のとき,

$$A\overrightarrow{x} = k\overrightarrow{x} \qquad \cdots ①$$

をみたす $k$ の値と, そのときの $\overrightarrow{x}$ を求めよ。

**【解答】**

固有方程式は

$$x^2 - 4 = 0$$

となるので固有値は

$$k = -2, 2$$

(i) $k = -2$ のとき, ① より

$$(A-2E)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\overrightarrow{x_1} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \ (c_1 \fallingdotseq 0)$$

(ii) $k = 2$ のとき, ① より

$$(A-2E)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -16 & 8 \end{pmatrix} \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\overrightarrow{x_2} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (c_2 \fallingdotseq 0)$$

したがって求める解は,$c_1, c_2$ を任意の 0 でない定数として,

$$k = -2 \text{ のとき}, \overrightarrow{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ k = 2 \text{ のとき}, \overrightarrow{x} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \cdots (\text{答})$$

普通，固有ベクトルといえば $c_1, c_2$ をつけないで良いことになっています。したがって $A$ の固有値は $\pm 2$, 固有値 $-2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 固有値 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ といっても構いません。さてそれではこれを MuPAD で求めて見ましょう。次のコマンドを使います。

| | |
|---|---|
| linalg::charpoly(A ,x); | $A$ の固有方程式 (変数 $x$) を求める。 |
| linalg::eigenvalues(A); | $A$ の固有値を求める。 |
| linalg::eigenvectors(A); | $A$ の固有ベクトルを求める。 |

それではやってみます。

- `A := matrix([[-10,6][-16,10]]);` $\quad >> \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ -16 & 10 \end{pmatrix}$
- `linalg :: charpoly(A,x);` $\quad >> x^2 - 4$
- `linalg :: eigenvalues(A);` $\quad >> \{-2, 2\}$
- `linalg :: eigenvectors(A);` $\quad >> \left[ [-2, 1] \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, [2, 1] \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

最後の式は

「固有値 $(-2)$ の重複度は 1 で, その固有ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 2 の重複度は 1 で, その固有ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ を表します。$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ですから，確かに計算で求めた結果と一致します。

## 11.6 対角化

### 11.6.1 1 次独立な固有ベクトルが２つあるとき

固有値, 固有ベクトルは次のような形でも出題されます。

**例題 5**

$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ とし，$A, P$ が $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ をみたすとき, 次の問いに答えよ。

(1)$a, b, c$ の値を求めよ。

(2) $A^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

**【解答】**

(1)$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ より

$$
\begin{aligned}
AP = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6a + 12 & 12 + 6b \\ -2a - 2 & -4 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2c \\ 4 & bc \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 6a + 12 & = 2a \\ 12 + 6b & = 2c \\ -2a - 2 & = 4 \\ -4 - b & = bc \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow a = -3, b = -1, c = 3 \qquad \cdots(答)
\end{aligned}
$$

(2) (1) より $P=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とすると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots ①$$

① の両辺を $n$ 乗すると,

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$$

一般に, $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$, また $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は対角行列だから $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. したがって,

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \Longleftrightarrow P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3\cdot 2^n+4\cdot 3^n & -6\cdot 2^n+6\cdot 3^n \\ 2\cdot 2^n-2\cdot 3^n & 4\cdot 2^n-3\cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \cdots(答)$$

一般に, 次の定理が成り立ます。

**定理**

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が固有値 $k_1, k_2$ とそれぞれに対する固有ベクトル $\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ をもち, $\overrightarrow{x_1}$ と $\overrightarrow{x_2}$ が 1 次独立なとき, $P=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}=(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ とすると, $ps-qr \fallingdotseq 0$ より $P^{-1}$ が存在し,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

【証明】
仮定より,

$$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pk_1 \\ qk_1 \end{pmatrix}, \text{ かつ } A\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} rk_2 \\ sk_2 \end{pmatrix}$$

まとめて書くと

$$A\left(\begin{array}{c:c} p & r \\ q & s \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} pk_1 & rk_2 \\ qk_1 & sk_2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

よって $P=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと

$$AP=P\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots【証明終】$$

すなわち 1 次独立な固有ベクトル $\overrightarrow{x_1} = \binom{p}{q}, \overrightarrow{x_2} = \binom{r}{s}$ があるとき，$P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ とすれば，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ ($x_1, x_2$ は それぞれ $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ に対する固有値) が成り立ちます。このように $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の形の行列に変えることを対角化といいます。MuPAD では A の対角化は，次のようにします。

linalg::jordanForm(A);

注18) さっそく，やって見ましょう。

- `A := matrix([[6, 6], [-2, -1]]);` $>> \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
- `linalg :: eigenvectors(A);` $>> \left[[-2, 1]\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, [3, 1]\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

どうやら固有ベクトルは $2\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ と, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となりますから $P$ を次のように定義します。

- `P := matrix([[-3, -2], [2, 1]]);` $>> \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP$ を計算してみます。

- `P ^ (-1) * A * P;` $>> \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

確かに成分を固有値とした対角行列になりました。次はこれを一気にやってみます。

- `linalg :: jordanForm(A);` $>> \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

### 11.6.2　1 次独立な固有ベクトルが１つしかないとき

実は，1 次独立な固有ベクトルを 2 つ取れない場合でも $P$ を適当に選ぶと, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の形に変形できることがわかっています。

**例題 6**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ について
(1) $P^{-1}AP$ を求めよ。
(2) $(P^{-1}AP)^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。
(3) $A^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

**【解答】**

(1)

$$P^{-1}AP = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots(答)$$

注18) jordanform(Jordan 標準形 – 対角化を一般化したもの) というのは大学の一年生の数学 (線形代数学) の授業のゴールみたいなものです。私も苦労しました。ほんとに。

(2)

$$\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&2\cdot 3\\0&3^2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^2&2\cdot 3\\0&3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3&3\cdot 3^2\\0&3^3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^3&3\cdot 3^2\\0&3^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^4&4\cdot 3^3\\0&3^4\end{pmatrix}\cdots$$

となるから

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\qquad\cdots(答)$$

(3) 一般に $(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$ が成り立つから

$$A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}=3^{n-1}\begin{pmatrix}3-2n&-n\\4n&2n+3\end{pmatrix}\qquad\cdots(答)$$

この場合, 固有方程式は

$$x^2-6x+9=0\iff(x-3)^2=0$$

したがって固有値は

$$x=3\ (2\ 重解)$$

それに対する固有ベクトルを $\overrightarrow{x_1}=\binom{p}{q}$ とすると

$$(A-3E)\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-2&-1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\ (c_1\fallingdotseq 0)$$

よって,$\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ としてよい。ここで $(A-3E)\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}$ をみたす $\overrightarrow{x_2}=\binom{r}{s}$ を求めると

$$\begin{pmatrix}-2&-1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{l}-2r-s=1\\4r+2s=-2\end{array}\right.\iff\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

簡単のため $c_2=0$ とすると

$$\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

ここで $P=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2})=\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\end{pmatrix}$ としたものが, 例題の $P$ である。一般に次の定理が成り立つ。

**定理**

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ が固有値 $\alpha$(2 重解) をもち，かつ $A\fallingdotseq\alpha E$ のときは, $\alpha$ に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{x_1}\,(=\binom{p}{q})$, $(A-\alpha E)\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_1}$ をみたすベクトルを $\overrightarrow{x_2}\,(=\binom{r}{s})$ としたとき

$$P=(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2})=\begin{pmatrix}p&r\\q&s\end{pmatrix}\ とすると，P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$$

定理の証明をする前に,MuPAD で やってみましょう。

- `A := matrix([[1, −1], [4, 5]]);` $\quad >> \begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$
- `linalg :: eigenvectors(A);` $\quad >> \left[[3,2]\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right]$

これは固有値が 3 (2 重解) で, それに対する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$ であることを表しています。しかし適当に $P$ をとると $\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ の形になります。それはとっても簡単で jordanForm(A) とするだけです。

- `linalg :: jordanForm(A);` $\quad >> \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

このように MuPAD では, 一瞬にしてできてしましします。あっけない気がします。ちょっと危険な気もします。高校では答えだけでは正解になりませんが，考えてみたら当たり前ですね。それじゃあ, 最後に定理の証明をやって終わりにします。これはちょと難しいので ' 付録' とします。

【証明】
いま $A$ の固有値を $\alpha$ (2 重解), その固有ベクトルを $\overrightarrow{x_1}$ とすると,

$$(A-\alpha E)\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0} \qquad \cdots①$$

ここで

$$(A-\alpha E)\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}\ (\text{ただし}, \overrightarrow{x_1}\text{と}\overrightarrow{x_2}\text{は 1 次独立}) \qquad \cdots②$$

をみたす ベクトル $\overrightarrow{x_2}$ が見つかったとすると，② $\Longleftrightarrow A\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1} + \alpha\overrightarrow{x_2}$ であるから，$P = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ とすると

$$AP = A(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (A\overrightarrow{x_1}, A\overrightarrow{x_2}) = (\alpha\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_1} + \alpha\overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_2}$ が 1 次独立のとき，$P^{-1}$ は存在するから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

となり確かに変形された。よって，あとは② をみたす ベクトル $\overrightarrow{x_2}$ が存在することを言えばよい。まず $\alpha$ が重解となるので固有方程式は

$$(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$$

したがってケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 E = (A-\alpha E)^2 = O \qquad \cdots③$$

仮定より，$A - \alpha E \fallingdotseq O$ だから，$A - \alpha E = B$ とおくと，①,②,③ より

$B^2 = O, B \fallingdotseq O$ のとき,

$$\begin{cases} B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0} \\ B\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1} \end{cases} \quad (\text{ただし}, \overrightarrow{x_1}\text{と}\overrightarrow{x_2}\text{は 1 次独立}) \qquad \cdots④$$

をみたす $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ が存在することを証明すればよい。まず，$B^2 = O$ より $det(B) = 0$ だから $B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$ をみたす $\overrightarrow{x_1}(\overrightarrow{x_1} \fallingdotseq \overrightarrow{0})$ は存在する。つぎに，$\overrightarrow{x_1}$ と 1 次独立な**あるベクトル**$\overrightarrow{x_3}$ をとって，$B\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{y}$ となったとすると $B^2 = O$ より

$$B\overrightarrow{y} = B^2\overrightarrow{x_3} = O\,\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{0}$$

ところが $B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$ でもあるから，$\overrightarrow{y}$と$\overrightarrow{x_1}$ が 1 次独立とすると,$B = O$ となり矛盾。[注19] よって $\overrightarrow{y} = k\overrightarrow{x_1}$. ところが，ここで $k = 0$ となったとすると $B\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$. $B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$ なので $B = O$ となり矛盾する。よって $B\overrightarrow{x_3} = k\overrightarrow{x_1}(k \fallingdotseq 0)$. ゆえに，$\overrightarrow{x_2} = \frac{1}{k}\overrightarrow{x_3}$ とすると，

$$B\overrightarrow{x_2} = \frac{1}{k}B\overrightarrow{x_3} = \frac{1}{k}\cdot k\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{x_1}$$

ここで，$\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_3}$ は 1 次独立なので，$\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_2}$ も 1 次独立である。よって定理は証明された。

[注19] 一般に $2 \times 2$ 行列 $B$ に対し $B\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$かつ $B\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{0}$ ならば，$B(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ここで，さらに $\overrightarrow{x_1}$と$\overrightarrow{x_2}$ が 1 次独立ならば，$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})^{-1}$ が存在するので $B = O$ となる。

【参考文献など】

はじめての MuPAD - 赤間世紀著, Springer 出版
MuPAD Pro 2.0 簡易日本語マニュアル-Sciface,LightStone Corp
mupad pdf(www.xmath.ous.ac.jp/˜shimeno/mupad.html)- 示野　信一著