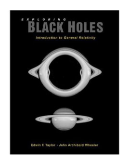
目で見るブラックホール 1
-シュワルツシルト時空内の運動（原理編）-

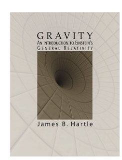
Cabri 研究会　2013年4月7日
生越　茂樹

参考文献

① 一般相対性理論入門(Black Holes);
Taylor &Wheeler 著,　牧野伸義 訳
② 重力(Gravity);
Hartle 著 ,　牧野伸義訳
③ ブラックホールと時空の歪み;
Thorne著,　林 一・塚原周信 訳
④ ブラックホールの世界（目で視る相対論 I);
福江　純 著
⑤ イメージできる相対性理論
飛車来人　著



①



②

③

特に ① にはお世話になりました. アメリカで 高校の理科の先生も使っている本.
Feynmanを想い起こさせるスタイル(なんと WheelerはFeynmanを教えた事がある!)
②は専門書. 説明は詳しいが 「かなり」厚い. 後ろの方だけ テンソルも使う.
③は一般書. 数式なし. Thorneは有名な相対論学者なので, 裏話が色々聞ける.

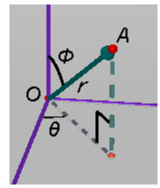
§1. 平坦な時空の計量

平坦な時空の中で，２つの事象A(t,x,y,z)とB$(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)$があり，
AからBまで移動した時の固有時間(wristwatch time)を $d\tau$ とすると，

$$d\tau^2=dt^2-\frac{1}{c^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$$

時間の単位を「光の速度が１」となる様に定めると, $\left(\text{例えば,}\frac{1}{3\cdot 10^8}\text{秒を，改めて１秒とすると,}\right)$

$$\boxed{d\tau^2=dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)}\cdots(*)$$



さらに A,Bの空間成分を極座標(r,θ,ϕ)で表すと,

$$\boxed{d\tau^2=dt^2-dr^2-r^2(\sin^2\phi\, d\theta^2+\, d\phi^2)}$$

特に 「$\phi=\pi/2$」(A,Bが赤道面上)のときは,

$$\boxed{d\tau^2=dt^2-dr^2-r^2d\theta^2}(\phi=\pi/2)$$

(注)平坦な時空では dt,dx などは微少量でなくとも, $d\tau$ は正確に表される.
また 時間や空間の単位を 「光速が1」になるように選べば，(*)は成り立つ.
例えば「1年」を時間単位に，「1光年」を距離の単位にとっても良いし,
適当な長さの棒を拾ってきて，その長さを 1 m, 光がその長さを進むのに掛かる時間を 1 秒と決めても良い.
もし，等速運動をする宇宙船が ,地球の静止系で 5年間に 3光年進んだとすると, その固有時間は

$$d\tau^2=dt^2-dx^2=5^2-3^2=4^2 \qquad \therefore d\tau=4\text{年}$$

平坦時空の計量.gb

§2. 曲がった時空(Schwarzschild)の計量

自転,帯電していない質量Mの星の作る時空内で，互いに近い２つの事象間の固有時間 $d\tau$ は,

$$\boxed{d\tau^2=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)dt^2-\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2-\frac{r^2}{c^2}(\sin^2\phi\, d\theta^2+\, d\phi^2)}$$

「光の速度が 1」となるように時間単位を,「r が非常に大きい物体に与える 加速度が M/r^2」
となる様に質量の単位を定めると, $\left(\frac{1}{3\cdot 10^8}\text{秒を，改めて１秒とし，質量 } m \text{ を，} Gm/c^2 \text{ で置き換えると,}\right)$

$$\boxed{d\tau^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(\sin^2\phi\, d\theta^2+\, d\phi^2)}$$

特に 「$\phi=\pi/2$」(A,Bが赤道面上)のときは,

$$\boxed{d\tau^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2}\quad\cdots(\text{曲がった時空})$$

【比較】 $\boxed{d\tau^2=dt^2-dr^2-r^2d\theta^2}$ $\cdots$(平坦な時空)

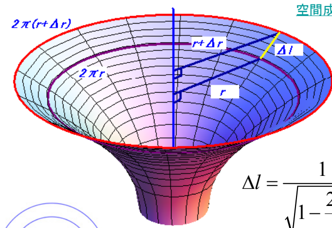
このとき，M/rは無次元なので, Mの次元は距離となる．(「幾何学単位系」と呼ばれる.)

例えば,

地球の質量=0.444cm, 太陽の質量=1.477km, 白鳥座X1の質量=15km (太陽の10倍).
銀河中心のBlackhole=3800万km (太陽の2600万倍, 水星の軌道半径の約2/3倍),
NGC1277銀河中心のBlackhole=250億km (太陽の170億倍, 海王星の軌道半径の約5倍.)

§ 2-1. Schwartzschild計量の空間成分

空間成分.gb



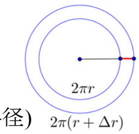
$$\boxed{d\tau^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2}$$

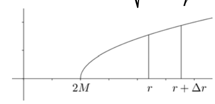
事象A,Bの t 成分が同じ時，空間的距離 dl は，

$$\boxed{dl^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2}\text{(schwarzschild)}\cdots(*)$$

$$\Delta l=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}\Delta r$$

【比較】$\boxed{dl^2=dr^2+r^2d\theta^2}$(平坦な時空)





よって　r が一定の時，円周の長さは $2\pi r$ になる．

換言すると「r＝円周 / (2π)」と定義できる．(換算半径)

また，θ が等しいとき, $r=r_1$ と $r=r_2$ の事象の空間的距離は $dl=\int_{r_1}^{r_2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}dr$ （$>r_2-r_1$ ）

一方, $z=f(r)=2\sqrt{2M(r-2M)}$ に対し, $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2M}{\sqrt{2M(r-2M)}}\right)^2}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ だから

$z=f(r)$をz軸の周りに回転して出来る曲面(上図)上の2点間のEuclid距離と(*)は等しい.

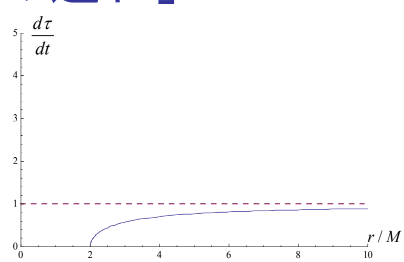
即ち，Schwarzschild 赤道面の空間部分(2次元曲面)は, 3次元Euclid空間へ埋め込みができる.

§ 2-2.「時間の遅れ」

$$\boxed{d\tau^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2}$$

事象A,Bの r,θ 成分が同じ時，固有時間 $d\tau$ は，

$$\boxed{d\tau=\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\,dt}\ (schwarzschild)\cdots(*)$$



$r>>1$の時, $dt\approx d\tau$ だから, t は「遠方観測者時間」(bookkeeper time) とも呼ばれる.

また, $r>2M$ では 「$d\tau<dt$」で, $r=2M$ では「$d\tau=0$」(凍りつく). $r\le 2M$ の時は, (*)は使えない.

$r=2M$ は, Shwartzschild半径（事象の地平線）と呼ばれるが，特異点ではない.

例えば, 地球の静止軌道(r_1=26600km)上にある衛星の時計と, 地球表面 (r_0=6370km)にある時計を比べると, 地球の質量は 0.444cmだから, 地球表面で 1日たったとき, 衛星では,

$$\left(\sqrt{\left(1-\frac{2\times0.00444}{26600000}\right)/\left(1-\frac{2\times0.00444}{6370000}\right)}-1\right)\times24\times3600\text{=0.0000458(秒だけ余計に進む)}$$

しかし，この間に光(電波)の進む距離は　$0.0000458\times3\cdot10^8$=13740m $\approx$ 14km. (1分あたりでは=9.54m)

よって GPSでは，一般相対論の効果は無視できない.

(実際には，重力の他に「速度による相対論効果」もあるので，違いはこれより小さい.)

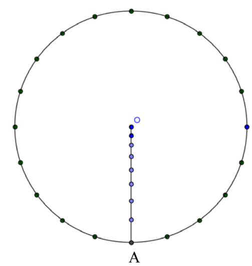
同様，高層ビルの100階(300m) に住む人は， 1 階に住む人に比べ，100年に0.0001秒程度，年を余計に取る.

§3.等価原理

“そのとき，次のような形で『私の生涯で最もすばらしい考え』が浮かんだ．重力場は，相対的存在に過ぎない．なぜならば，家の屋根から自由落下している観測者にとって一少なくとも彼のごく近傍では一　重力は存在しないからである．”(アインシュタイン)

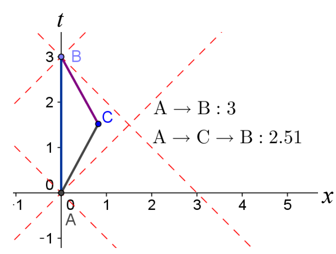
「一様な重力場」は完全に消せる．地球の重力も，局所的には消せる．
逆に言うと,「重力を感じる」と言うことは「加速度系で観測している」と言うことである．
「地球の表面で感じている重力」も，我々が「加速度運動」している事から生じる．
即ち 「**重力は力ではない**」．

(一以下は，「超」直感的な説明です一)
重力を長く感じた時は，慣性系に対し運動しているので，
特殊相対論により，重力のない場合と比べると
「**時間は遅れ，単位物差し（1mとする)は縮む**」．
そして，周りの長さが$2\pi r$の円の半径(OA)には，
r個より多くの 単位物差し を入れることが出来る．
(図は　重力がある場合の概念図)



§4.自由落下と測地線(極値的固有時の原理)

平坦な時空では，宇宙旅行をして帰ってきた兄
(時空間では折れ線を描く)は，地球にずっと居た弟
(時空間では直線軌道を描く)に比べ年を取らない．
言い換えると「自由落下している弟」は，
「自由落下していない兄」より年を取る．
即ち，物体が自由落下するとき，
「物体の腕時計時間（固有時間）は最大値を取る．」

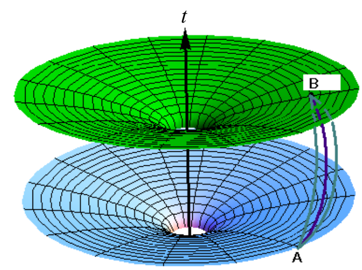


測地線（平坦時空).ggb

同様，曲がった時空では，自由落下する時
「腕時計時間（固有時間）が**極値**を取る」.

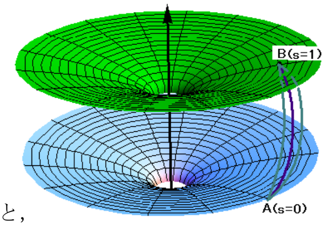
即ち，時空間で，２点AとBを固定した時，
自由落下粒子の時空での経路は，その近傍の経路に比べ，その腕時計時間（固有時間）が極値を取る経路である．（**極値的固有時の原理**）

このような経路を「測地線」と言う．
（例えば，右上図の線分AB,右下図の紺の線)



測地線（曲がった時空).ggb

§5.「極値的固有時の原理」と保存則



Shwartzschild 時空内の2点A,Bを結ぶ経路に対して，
パラメータs を 「Aにおいて$s=0$, Bにおいて $s=1$ 」
になるように設定すると，固有時間 T は,

$$T=\int_A^B d\tau=\int_0^1\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2}\,ds$$

ここで，$L=\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2}$ とおくと，

L は t と θ によらない. また L は自由落下時には極値を取るから, 変分法の公式から,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial(dt/ds)}\right)=\frac{\partial L}{\partial t}\cdots①,\qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial(d\theta/ds)}\right)=\frac{\partial L}{\partial\theta}\cdots②$$

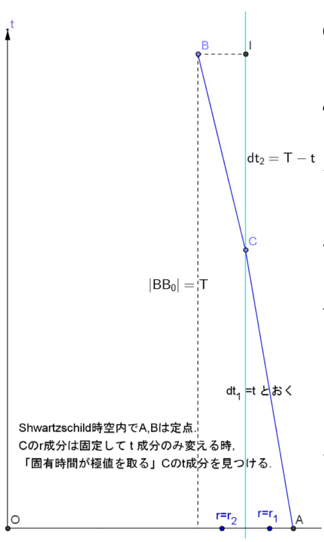
「$\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$」だから, $\frac{\partial L}{\partial(dt/ds)}$と$\frac{\partial L}{\partial(d\theta/ds)}$は一定になる. また, L の定義より「$Lds=d\tau$ 」となるから,

$$\frac{\partial L}{\partial(dt/ds)}=\frac{1-\frac{2M}{r}}{L}\cdot\frac{dt}{ds}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau},\qquad \frac{\partial L}{\partial(d\theta/ds)}=\frac{-r^2}{L}\cdot\frac{d\theta}{ds}=-r^2\frac{d\theta}{d\tau}$$

故に, 「$e\equiv\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$」 と 「$l\equiv r^2\frac{d\theta}{d\tau}$」 は 一定.

$r>>1$ の時, e と l は, 単位質量当たりの「特殊相対論的Energy」と「Newton的角運動量」と等しい.
故に, e と l をそれぞれ, 単位質量当たりの「エネルギー」と「角運動量」と定義する.

「エネルギーの保存則」の初歩的証明



(参考文献 ①より)

$$d\tau_1=\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)t^2-\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)^{-1}dr_1^2},\quad d\tau_2=\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)(T-t)^2-\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)^{-1}dr_2^2}$$

$$\tau=d\tau_1+d\tau_2=\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)t^2-\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)^{-1}dr_1^2}+\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)(T-t)^2-\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)^{-1}dr_2^2}$$

よって, τ が極値を取る時,

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)t}{\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)t^2-\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)^{-1}dr_1^2}}-\frac{\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)(T-t)}{\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)t^2-\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)^{-1}dr_2^2}}=0$$

$$\therefore\frac{\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)t}{d\tau_1}=\frac{\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)(T-t)}{d\tau_2}\iff\frac{\left(1-\frac{2M}{r_1}\right)dt_1}{d\tau_1}=\frac{\left(1-\frac{2M}{r_2}\right)dt_2}{d\tau_2}$$

$(\because t=dt_1,\ T-t=dt_2)$

ゆえに, $e=\frac{\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt}{d\tau}$ は 保存される.

§6.自由落下物体の軌道

以上から, Shwartzschild 時空の中の自由落下粒子について，次が成り立つ.

$$\begin{cases} \boxed{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)\dfrac{dt}{d\tau}=e} & \text{(エネルギー保存の法則)} \cdots① \\ \boxed{r^2\dfrac{d\theta}{d\tau}=l} & \text{(角運動量保存の法則)} \cdots② \\ d\tau^2=\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2 & \text{(shwartzschild計量)} \cdots③ \end{cases}$$

③の両辺を $d\tau^2$で割って，①と②を使うと，

$$1=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-r^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \to \boxed{\frac{dr}{d\tau}=\pm\sqrt{e^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{l^2}{r^2}\right)}} \cdots④$$

ここで $dr/d\tau$ の符号は物体が中心に向かっているか，離れているかで定まる.

④を数値積分すれば軌跡が求まるが, *Mathematica* では 「$dr/d\tau=0$」になる点(方向転換点)で軌跡が切れてしまう．よって，④を τ で微分すると，$\dfrac{dr}{d\tau}$ の符号によらず,

$$\boxed{\frac{d^2r}{d\tau^2}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)\cdot\frac{dr}{d\tau}=-\frac{M}{r^2}+\frac{l^2}{r^3}-\frac{3M\ l^2}{r^4}} \cdots⑤$$

⑤は *Mathematica* で数値積分できる．②と合わせると, 物体の軌跡が τ の関数として表せる．さらに①を使うと, 物体の軌跡が t の関数として表せる.