1. 楕円の極方程式

$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の焦点の一つを $F(1,0)$ とする. F を極とする極方程式を求めよ.

C 上の点を $P(x,y)$ とおくと,

$$\mathrm{PF}^2=(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{4}x^2-2x+4=\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2$$

「$-2\leq x\leq 2$」だから

$$\mathrm{PF}=2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(4-x)\cdots①$$

$F(1,0)$ を極とする極座標が (r,θ) のとき

$$\begin{cases}x=r\cos\theta+1\\ y=r\sin\theta\end{cases}\cdots②$$

よって①より,

$$r=\frac{1}{2}(4-r\cos\theta)\Leftrightarrow \underline{r=\frac{3}{2+\cos\theta}}$$

【別解】

直接, ②をCの式へ代入すると

$$\frac{1}{4}(r\cos\theta+1)^2+\frac{1}{3}(r\sin\theta)^2=1$$

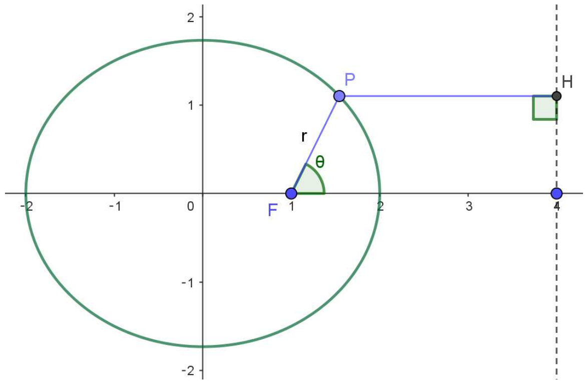
$$\therefore 3r^2\cos^2\theta+4r^2\sin^2\theta+6r\cos\theta-9=0$$

$$\therefore (2-\cos\theta)(2+\cos\theta)r^2+(6\cos\theta)r-9=0$$

$$\therefore \{(2-\cos\theta)r+3\}\{(2+\cos\theta)r-3\}=0$$

$$\therefore r=\frac{-3}{2-\cos\theta}\cdots③,\quad r=\frac{3}{2+\cos\theta}\cdots④$$

「$2-\cos\theta>0$」だから, $\underline{r=\dfrac{3}{2+\cos\theta}}$



【参考】P から $l:x=4$ に降ろした垂線の足を H とすると,

①より $\quad PF=\dfrac{1}{2}PH\Leftrightarrow\dfrac{PF}{PH}=\dfrac{1}{2}$

即ちこの楕円の離心率は $\dfrac{1}{2}$ （1より小さい)

2. 双曲線の極方程式

【発展】$\boxed{C : x^2 - y^2 = 1 \text{の焦点の一つ} F(\sqrt{2},0) \text{を極とする極方程式を求めよ.}}$

C上の点を$P(x,y)$とおくと,

$$\mathrm{PF}^2 = (x-\sqrt{2})^2 + y^2 = (x-\sqrt{2})^2 + (x^2-1) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = \left(\sqrt{2}x-1\right)^2$$

$$\mathrm{PF} = |\sqrt{2}x-1| = \sqrt{2}\left|x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \begin{cases} \sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \left(x>\frac{1}{\sqrt{2}}\text{のとき}\right) \\ \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-x\right) & \left(x<\frac{1}{\sqrt{2}}\text{のとき}\right) \end{cases} \cdots ①$$

$F(\sqrt{2},0)$を極とする極座標が(r,θ)のとき $\begin{cases} x = r\cos\theta + \sqrt{2} \\ y = r\sin\theta \end{cases} \cdots ②$

よって①より

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta}\left(x>\frac{1}{\sqrt{2}}\text{のとき}\right) \\ \dfrac{1}{-1-\sqrt{2}\cos\theta}\left(x<\frac{1}{\sqrt{2}}\text{のとき}\right) \end{cases}$$

【別解】
直接,②をCの式へ代入すると

$$(r\cos\theta+\sqrt{2})^2 - (r\sin\theta)^2 = 1$$

$$\therefore r^2(2\cos^2\theta-1) + (2\sqrt{2}\cos\theta)r + 1 = 0$$

$$\therefore (\sqrt{2}\cos\theta-1)(\sqrt{2}\cos\theta+1)r^2 + (2\sqrt{2}\cos\theta)r + 1 = 0$$

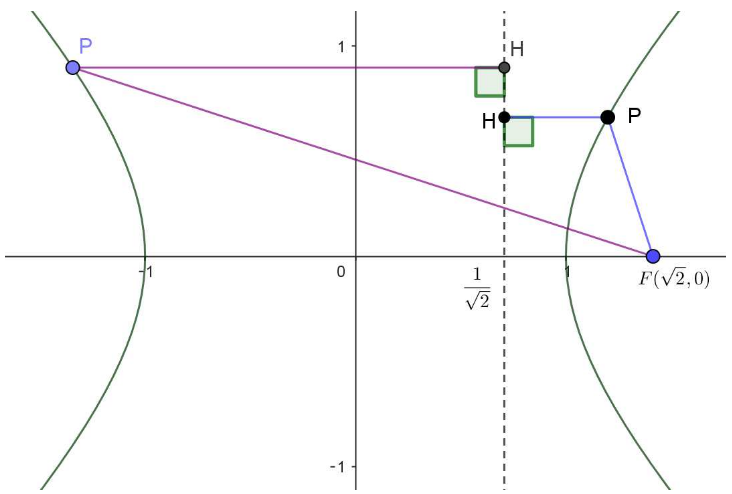
$$\therefore \{(\sqrt{2}\cos\theta-1)r+1\}\{(\sqrt{2}\cos\theta+1)r+1\} = 0$$

$$\underline{r = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta}\left(\cos\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}\text{のとき}\right) \\ \dfrac{1}{-1-\sqrt{2}\cos\theta}\left(\cos\theta<-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{のとき}\right) \end{cases}}$$

【参考】
Pから$l : x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$に降ろした垂線の足を$H$とすると,①より

$$PF = \sqrt{2}PH \Leftrightarrow \frac{PF}{PH} = \sqrt{2}$$

(Pの位置によらず$PF/PH = \sqrt{2}$)
即ちこの双曲線の離心率は
$\sqrt{2}$ (1より大)



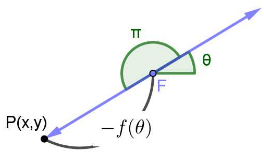
【さらなる発展】

前ページより $x^2-y^2=1$ の極方程式は2つに別れる．

$$r(\theta)=\begin{cases} f(\theta)=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta} & \left(\cos\theta<\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{7\pi}{4}\text{のとき}\right) \\ g(\theta)=\dfrac{1}{-1-\sqrt{2}\cos\theta} & \left(\cos\theta<-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{4}<\theta<\dfrac{5\pi}{4}\text{のとき}\right) \end{cases}$$

$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のときは $f(\theta)<0$ となり，その区間では $f(\theta)$は役立たずに見える．

ところが $(*)\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta+\sqrt{2} \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$ であるから，$f(\theta)<0$ の時



$$\begin{cases} x=f(\theta)\cos\theta+\sqrt{2}=-f(\theta)\cos(\theta+\pi)+\sqrt{2} \\ y=f(\theta)\sin\theta=-f(\theta)\sin(\theta+\pi) \end{cases}$$

「$-f(\theta)>0$」だから，極座標が $(-f(\theta),\theta+\pi)$ の点を表す．

故に「$r(\theta)$の正負によらず（$*$）の様に $P(x,y)$ を定める」とすると，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ では

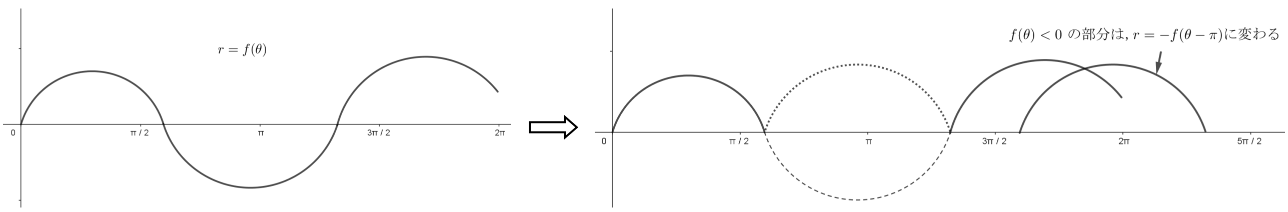
確かに$f(\theta)$は役立たずであるが，区間をπずらした「$\dfrac{3\pi}{4}<\theta<\dfrac{5\pi}{4}$」においては

$$r(\theta)=-f(\theta-\pi)=-\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}=g(\theta)$$

したがって

$$r(\theta)=\begin{cases} f(\theta) & \left(\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{7\pi}{4}\text{のとき}\right) \\ g(\theta) & \left(\dfrac{3\pi}{4}<\theta<\dfrac{5\pi}{4}\text{のとき}\right) \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad r(\theta)=f(\theta) \quad (\theta\ \text{は任意})$$

この様に２つの極方程式は１つにまとまる！　同様に「$r(\theta)=g(\theta)$ (θ は任意)」でもある．



さらに前ページで，楕円の極方程式は下の③，④の2つ求まったが

$$r=f(\theta)=\frac{-3}{2-\cos\theta}\cdots③,\qquad r=g(\theta)=\frac{3}{2+\cos\theta}\cdots④$$

$-f(\theta-\pi)=\dfrac{3}{2-\cos(\theta-\pi)}=\dfrac{3}{2+\cos\theta}=g(\theta)$　だから極方程式としては，どちらも正しい．

(「$r(\theta)$ の正負によらず$(*)$の様に $P(x,y)$ を定める」とした場合は同じ図形を与える)

放物線 $y^2=4px$についても，$r=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ と $r=\dfrac{-2p}{1+\cos\theta}$ の２つの極方程式がある．

GeoGebra File

ダウンロードしてからクリックして下さい．GeoGebra が立ち上がったら動点（殆どの場合は P)を動かしてみて下さい. またはスライダーを動かして下さい. タブレットでは指でサイズの変更もできます．Windows の場合は Ctrl+.Ctrl- などでサイズの変更ができます.

1.　楕円の準円
https://www.geogebra.org/m/e6s8snff

2. 放物線の準円
https://www.geogebra.org/m/v4kgnyen

3 放物線の極方程式
https://www.geogebra.org/m/z4ymsmxn

4 楕円の極方程式
https://www.geogebra.org/m/utxgme42

5 双曲線の極方程式
https://www.geogebra.org/m/fp7wzeqm