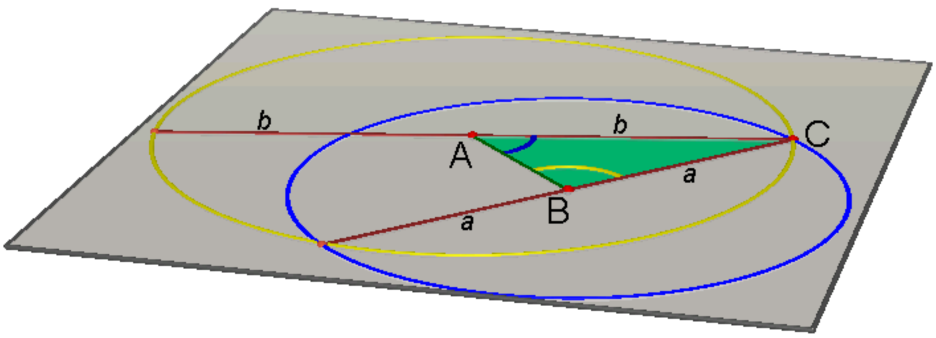
§25. 円・正弦定理

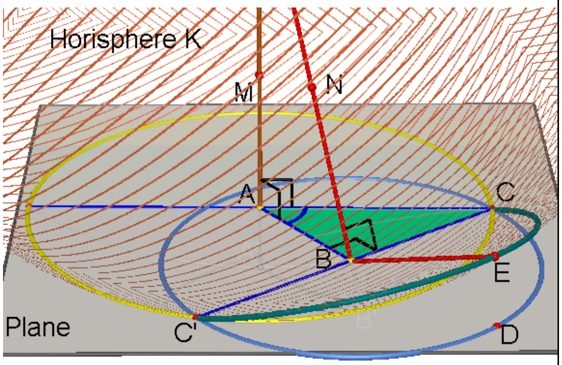
「円·正弦定理」平面三角形では, 辺を半径として描いた円周の長さは対角の正弦に比例する. 即ち, $$\frac{\bigcirc\mathrm{BC}}{\sin\mathrm{A}}=\frac{\bigcirc\mathrm{CA}}{\sin\mathrm{B}}=\frac{\bigcirc\mathrm{AB}}{\sin\mathrm{C}}$$

[注] ○ABは「ABを半径とする円の円周/円周長」を表す. Bolyai 独特の用語です.
ユークリッド平面では「◯BC=2πa, ◯CA=2πb 」だから, 通常の正弦定理（の一部）:
「$\dfrac{a}{\sin\mathrm{A}}=\dfrac{b}{\sin\mathrm{B}}=\dfrac{c}{\sin\mathrm{C}}$」となります.

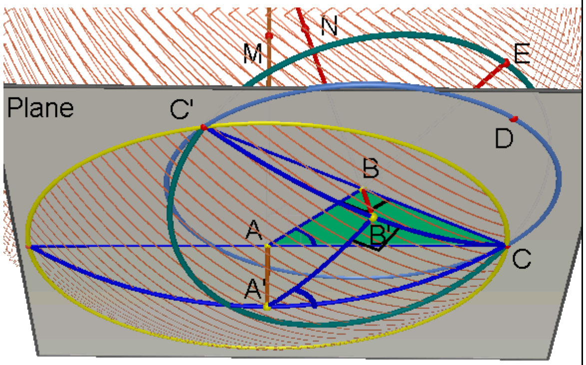


「証明」まず，∠B が直角の三角形について「$\sin A = \dfrac{\bigcirc BC}{\bigcirc CA}$」を証明します． その為に，軸が「A を通る平面と垂直な直線 AM」で かつ点 C を通る極限球 K を考えます．（この時 K は，平面と○AC を共有します．）B を通り AM と極限平行な直線を BN，そして直線 AM, BN と K の交点をそれぞれ A',B'とすると，AM,BN は軸なので，弧 A'B',B'C,CA'は極限円弧です． さらに B に関し C と対称な点を C'とすると，3 垂線の定理より「BC⊥BN」なので，B を通り BN と垂直な平面による K の断面は，直径が CC'の円 CEC'となります．

circle&sin_theorem.cg3 （是非動かしてみてください）



平面の上から見た図



平面の下から見た図

∠B'A'C は，平面 ABM と平面 ACM のなす角と等しいですが，平面⊥AM なので

$$\angle B'A'C = \angle BAC \quad \cdots ①$$

また，C と C'は平面 ABN に関し対称なので，

$$\angle A'B'C = 90^\circ \quad \cdots ②$$

極限球上ではユークリッド幾何が成り立つ」ので，①，②より，

$$\sin \angle BAC = \sin \angle B'A'C = \frac{\text{弧}B'C}{\text{弧}A'C} = \frac{2\pi \times \text{弧}B'C}{2\pi \times \text{弧}A'C} = \frac{\bigcirc B'C}{\bigcirc A'C} \quad (\text{K 上の円})$$

ところが，平面と K は○A'C を共有するので「○A'C=○AC」，同様に「○B'C＝円 CEC'」ですが，円 CDC'と円 CEC'は直径を共有するので「○B'C=円 CEC'=円 CDC'=○BC」

故に，

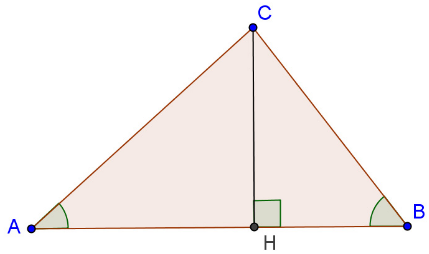
$$\sin \angle BAC = \frac{\bigcirc AC}{\bigcirc BC} \quad (\text{平面 ABC 上の円})$$

即ち 直角三角形に関しては定理が成り立ちます．一般の三角形では，二つの直角三角形に分割して，下図で

$$\sin A = \frac{\bigcirc CH}{\bigcirc AC},\ \sin B = \frac{\bigcirc CH}{\bigcirc BC}$$

ゆえに

$$\sin A : \sin B = \bigcirc BC : \bigcirc AC$$



[コメント]

この定理はかなり人気の定理らしく，Bonola の本にも Gray の本にも取り上げられています．どちらの本も Bolyai の定理のほんの一部しか解説していないことを考えると，意味深いです．またこの証明では，一つの円を「極限球上の円」とも「平面上の円」とも取っていますが，Bolyai は，さらに「等距離平面上の円」とも扱って，等距離平面の関係式を導いています．即ち，円は「3 つの顔」を持っています．この 3 つの顔を Bolyai は 実に見事に使い分けます．なお，下図は $\mathbf{H}^3$ モデルにおける図です．以前は，私はこちらの方が分かり易かったです．（H3.cg3）