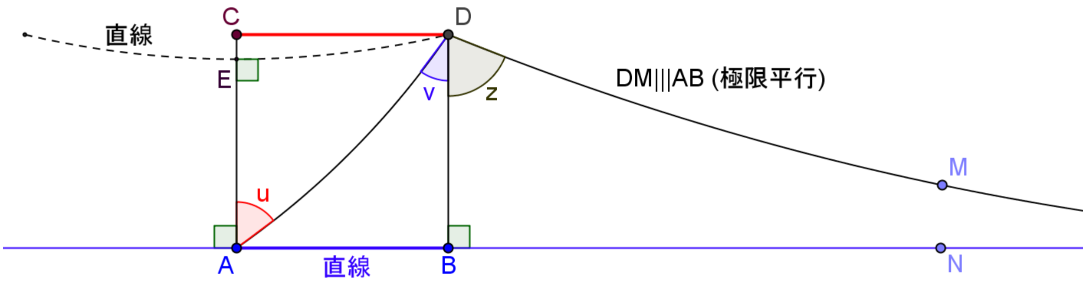
§27. 下図で CD は, 線分ABからの等距離線. $\angle CAD = u$, $\angle ADB = v$ とすると,

$$\overline{CD} : \overline{AB} = \sin u : \sin v \quad \cdots(*)$$

さらに BDの平行線角: $\Pi(BD) = z$ とすると,

$$\overline{CD} : \overline{AB} = \sin u : \sin v \ = 1 : \sin z \quad \cdots(**)$$

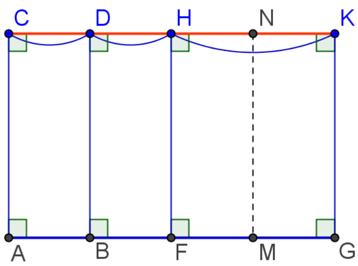


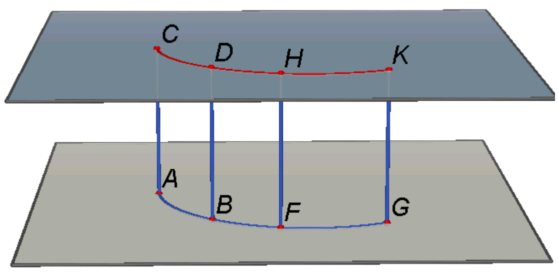
[補題]

一般に CD が直線 AB からの等距離線のとき,「AB 上の任意の線分 FG」と 対応する「CD 上の等距離線分 HK」の長さの比は一定となる. 例えば 直線 AB 上に点 F,G を $\overline{FG} = 2\overline{AB}$ となるように取り, 対応する CD 上の点を H,K とする. このとき FG の中点 M から AB に立てた垂線と CD の交点を N とすると「四辺形 FMNH≡四辺形 GMNK≡四辺形 ABCD」となり $\overline{HK} = 2\overline{FG}$. ゆえに,

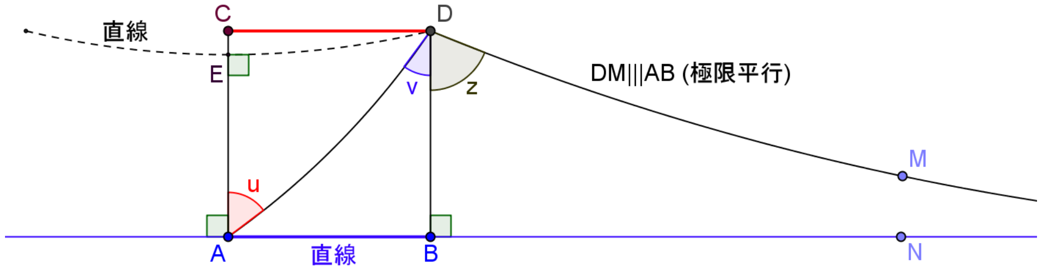
$$\overline{FG} : \overline{HK} = 2\overline{AB} : 2\overline{CD} = \overline{AB} : \overline{CD}$$

これは $\overline{FG} = k\overline{AB}$ $(k > 0)$ の時も成り立つので, 直線 AB とその等距離線 CD の対応する長さの比は一定となる. ($\overline{AC}$ のみに依存する.) さらに AB が直線でなく「平面曲線 L」のときでも, L を微小線分に分割すれば その各々の微小線分に関し同じ議論が出来るので, L と L からの等距離曲線 L'の長さの比は一定となる. (注 1)





[§27 の証明]



D から直線 AC に下ろした垂線の足を E とすると，§25 より，

$$\sin u = \frac{\bigcirc \mathrm{ED}}{\bigcirc \mathrm{AD}}\ ,\ \ \sin\ v = \frac{\bigcirc \mathrm{AB}}{\bigcirc \mathrm{AD}}$$

ゆえに，

$$\sin u : \sin\ v = \bigcirc \mathrm{ED} : \bigcirc \mathrm{AB} \quad \cdots①$$

次に （AC と垂直な平面 π 上）A を中心とし B を通る円を L とし，線分 BD を BD⊥π に保ったまま L 上を滑らせると D の描く軌跡 L'は〇CD (赤円)になる．（このとき ●CD や点 C は π からの等距離面上にある）． 前頁の[補題]より，

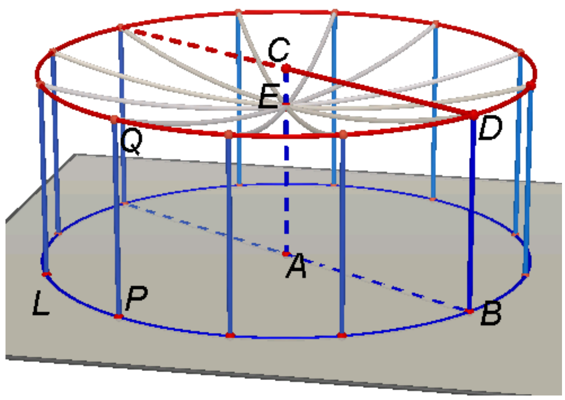
$$\bigcirc \mathrm{CD} : \bigcirc \mathrm{AB} = \overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{AB}} \quad \cdots②$$

〇ED と〇CD は同じ円だから，①,②より，

$$\overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{AB}} = \sin u : \sin v \quad \cdots(*)$$

かつ[補題]より「$\overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{AB}}$ $(=\sin u : \sin v)$ 」の値は $\overline{\mathrm{AB}}$ によらない．（$\overline{\mathrm{BD}}$ のみに依存）

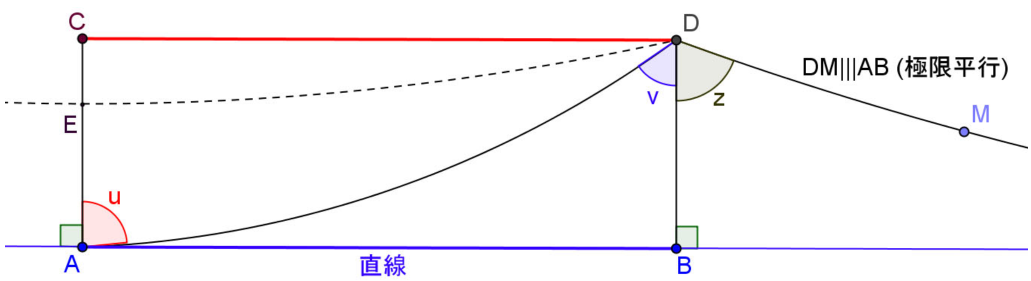
Fig12.cg3



ここで，B,D を固定し，A を B から無限に遠ざけると，DA は BA の極限平行線に近づき，

$$u \to \angle R, \quad v \to z = \Pi(\mathrm{BD})$$

$$\therefore\ \ \overline{\mathrm{CD}} : \overline{\mathrm{AB}} = \sin u : \sin v\ \ \to \sin 90^{\circ} : \ \sin z = 1 : \sin z \quad \cdots(**)$$



(注 1) [補題]のモデルによる証明

[補題]　曲線 AB とその等距離線 CD の長さの比は，曲線 AB と等距離曲線 CD の間の距離にのみ関係する．

H⁺モデル（ポアンカレ上半平面）で線分 AB とその等距離線分 CD に関して証明する．

「$ds=\dfrac{dl}{y}$ (dl はユークリッド的, ds は双曲的長さ)」だから A,B,C,D の y 成分を a,b,c,d ,

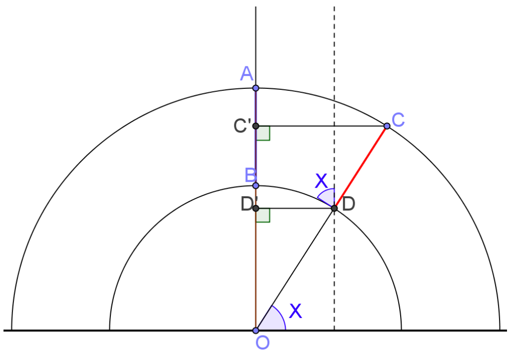
BDに対する平行線角: $\Pi(\mathrm{BD})=X$ とすると，

$$\overline{\mathrm{AB}}=\int_b^a \frac{1}{y}dy=[\log y]_b^a=\log\frac{a}{b} \qquad \cdots①$$

$$\overline{\mathrm{CD}}=\int_d^c \frac{1}{y}\frac{dy}{\sin X}=\frac{1}{\sin X}[\log y]_d^c$$

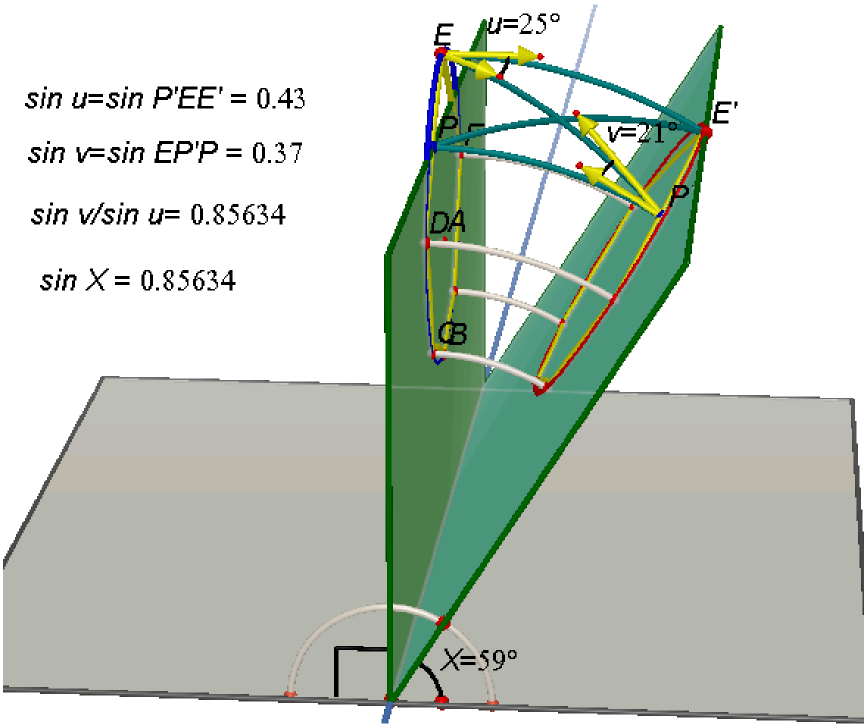
$$=\frac{1}{\sin X}\cdot\log\frac{c}{d}$$

$$=\frac{1}{\sin X}\cdot\log\frac{a}{b} \qquad \cdots②$$



①,②より，$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:\sin X \quad \cdots③$

H^3 モデルでも同様に証明できます．下図で，緑面の双曲平面 π に対し 斜交している平面 α が π の等距離面で「(π 上の曲線 L の長さ) : (対応する α 上の曲線 L' の長さ) = $\sin X:1$」となります．次のファイルは 「§27 の H^3 model による検証」も兼ねます．([H^3model.cg3])



(注２）§27 の H⁺モデルによる証明［前頁③の続き］

$\angle\mathrm{SAO}=u$, $\angle\mathrm{ADO}=v$ となるから，　△ASO と△SDH　から，

$$\overline{\mathrm{SO}}=\overline{\mathrm{AS}}\sin u \qquad \cdots ④$$

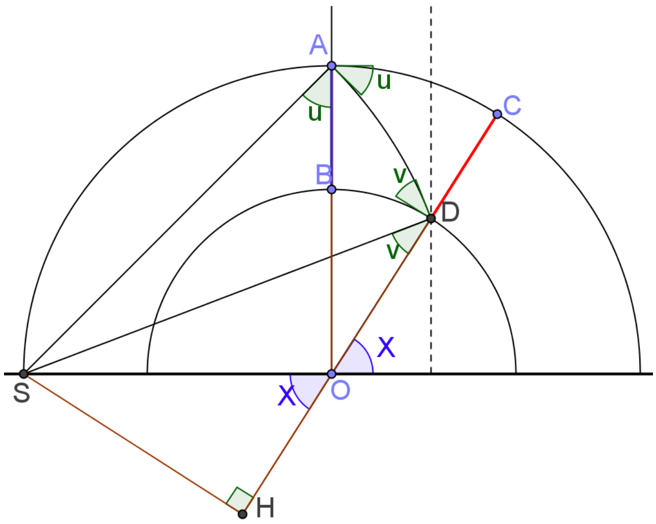
$$\overline{\mathrm{SH}}=\overline{\mathrm{SD}}\sin v \qquad \cdots ⑤$$

$\overline{\mathrm{SO}}=\overline{\mathrm{SH}}$ (半径) だから，

$$\sin \mathrm{X}=\frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{SO}}=\frac{\sin v}{\sin u}$$

前頁③より，$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:\sin X$ だから，

$$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:\sin X=\sin u:\sin v$$



proof_onH+.ggb