§34. ［平行線角Π(BD)の作図］

［図は§27と共通］ AE ⊥ AB, BD ⊥ AB, ED ⊥ AE, BD の平行線角:Π(BD) = z とする.
さらに $\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{ED}}$ をみたす点OをBD上にとり∠AOB = z' とすると，§25より

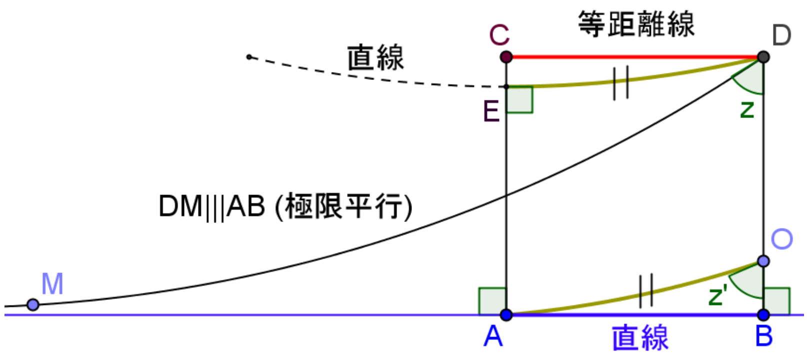
$$1 : \sin z' = \bigcirc\mathrm{AO} : \bigcirc\mathrm{AB} = \bigcirc\mathrm{ED} : \bigcirc\mathrm{AB}$$

一方, §27より,

$$\bigcirc\mathrm{ED} : \bigcirc\mathrm{AB} = \bigcirc\mathrm{CD} : \bigcirc\mathrm{AB} = 1 : \sin z$$

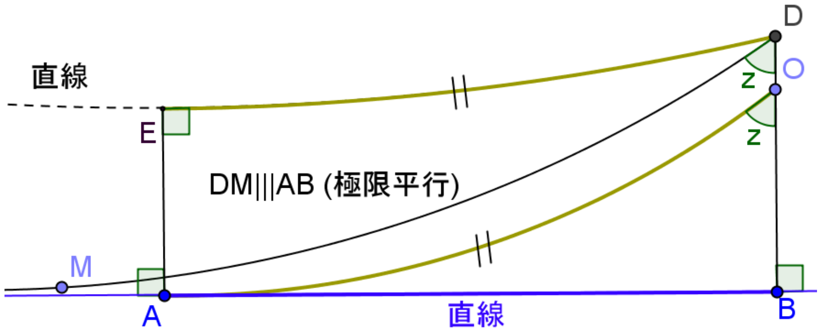
ゆえに

$$z = z'$$



§34' (発展)　［EDに極限平行な直線の作図］

AとBの距離が限りなく大きくなると, OA は BA の極限平行線 DM に限りなく近づきます. ところが，∠AOB = Π(BD) = z より, 点O は点D に限りなく近づき $\overline{\mathrm{AO}}$ は限りなく大きくなるので, 直線AO ||| 直線ED (極限平行).



(注 1) この作図は Hartshorne の「幾何学 II」に載っていましたが，Hartshorne が最初に思いついたかどうかは知りません. ただ Hartshone の証明は Hilbert の「端の算法」を使っていて，私には良く分からず，それが Bolyai の本を読むきっかけとなりました.

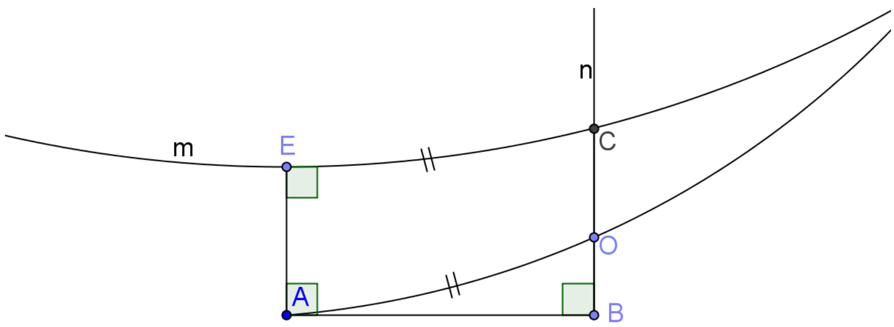
[注２]　上半平面モデルで，「ユークリッド線分の長さ」を dl ，対する「双曲的線分の長さ」を ds とすると，厳密には「$ds = k \cdot \dfrac{dl}{y}$」ですが， k は「宇宙の比例定数」で，数学だけでは決まりません．ところが，§34 を使うと平行線角が求まるので，これから k の値を求めることが出来ます．

[注 3]　§34’ を使うと「直線 m 外の 1 点 A を通る　m の極限平行線」が，作図できます．この作図には 平行線角 や 比例定数 k の値は不要です．

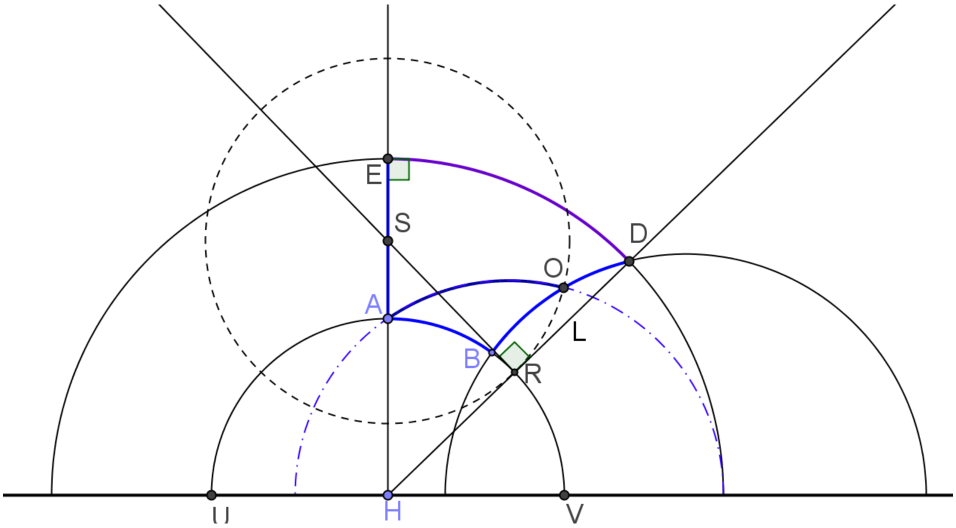
「直線 m 外の 1 点 A を通る　m の極限平行線」の作図 をまとめておきます．

① A から m に垂線 AE を下ろします．
② EA と直交する直線を A から引き，その上に適当な点 B をとります．さらに，B を通り，AB と直交する直線 n を引きます．
③ m と n の交点 C をとり，コンパス等で，n 上に $\overline{AO} = \overline{EC}$ となる点 O をとります．
④ A と O を結びます．直線 AO が，m と極限平行な直線です．

(*)ユークリッド平面上でも この作図はできます．この時「O = B, ∠ECB = ∠R」となります．



[注 4]　H⁺での，A を通り ED に極限平行な直線の作図例



D を通る直線 AE からの等距離線 L と，直線 AB の交点を R とすると $\overline{AR}=\overline{ED}$ & AB ⊥ L．
故に A を中心とし半径が $\overline{AR}$ の双曲的円は R において L と接する．この円と直線 BD の交点を O とすると $\overline{AO}=\overline{ED}$ をみたす．　もちろんコンパスを利用しても描けます．
(例えば 「ユークリッドの命題 2」を利用してコンパスを作り，マクロにすると良い．)

Cabri と GeoGebra というソフトで，H⁺上で作図しました．

[Cabri] Constraction.fig,　　[Geogebra] construction.ggb