§22.極限円からの等距離曲線は，軸が同一の極限円

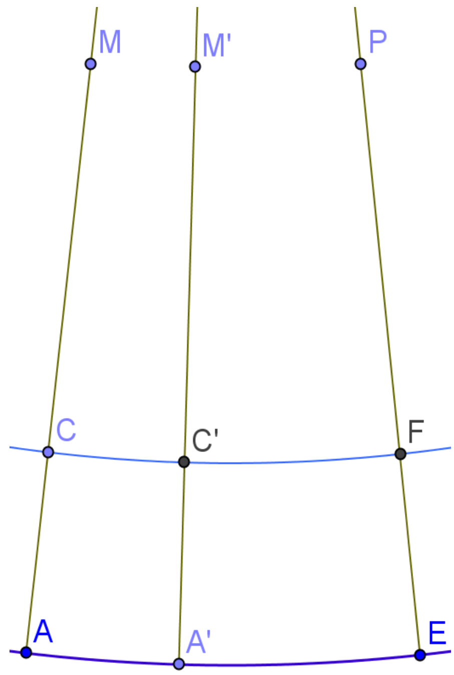
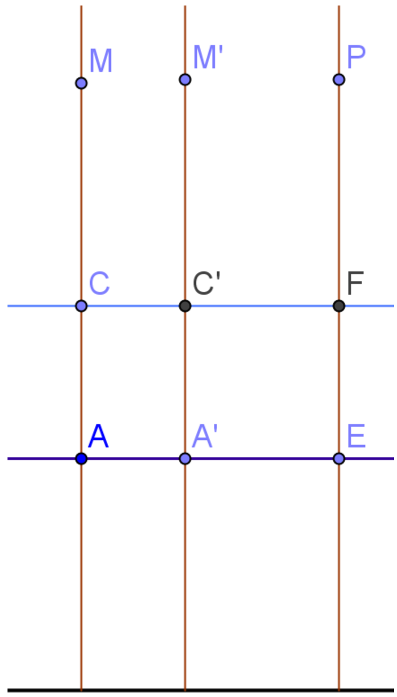
下図で A, E を極限円上の点，直線 AM, EP はその軸, C を軸 AM 上の点とする．A を極限円上に置き，∠EAC を直角に保ちながら，なめらかに滑らす．この時，C の軌跡は やはり軸を AM, EP とする極限円となる．

[注] 以下の二つの軌跡を考えます．

1. 鉛筆の一方の端を直線上に置き，垂直を保ちつつ動かした時，他方の端 C の描く軌跡
2. 鉛筆の一方の端を極限円上に置き，垂直を保ちつつ動かした時，他方の端 C の描く軌跡

[1]の場合は「等距離線」で，[2]の場合は「極限円」になります．ここでは印象的になるように，**等距離**と言う言葉を使いました．Bolyai の言葉ではありません．また[1]の場合，点 C の移動を「双曲的移動」，[2]の場合は「放物的移動」と呼びます．(これも Bolyai の言葉ではありません.)

[証明] 線分 AC を極限円上で，線分 A'C' まで動かしたとする．このとき A'C' ⊥ AE だから，A'C' も極限円の軸となる．また等距離線のときと同様にして（合同条件から）A'C' ⊥ CF となる．ゆえに C' は A'C' を軸とする極限円上にある．

Bolyai の図	H⁺での図
	

[注]右上の H⁺モデルをみると，定理は，明らかです．

§23. 2つの極限円が等距離にあるとき，その 2 本の軸で切り取られる弧長の比は，距離のみで定まる．

左下図で AE と CF は互いに等距離にある極限円で，AM,EP はその共有される軸とする．この時 AE 上の任意の点を B，軸 BN と CF の交点を D とすると，

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{CF}}}{\overline{\mathrm{AE}}} = f(\overline{\mathrm{AC}}) \qquad \cdots \text{距離のみの関数}$$

[注] §22 から 2 つの極限円が等距離にある時，軸は共通となる．またこの section では，$\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{CD}}$ は「極限円に沿って測った距離」を，$\overline{\mathrm{AC}}$ は「直線 AM に沿って測った距離」を表す．

[証明] 右下図で $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}}$ で A'C' は軸とすると，四角形 ABDC と四角形 BA'C'D は合同となるので $\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{C'D}}$．　ゆえに

$$\overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{CC'}} = 2\overline{\mathrm{AB}} : 2\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}}$$

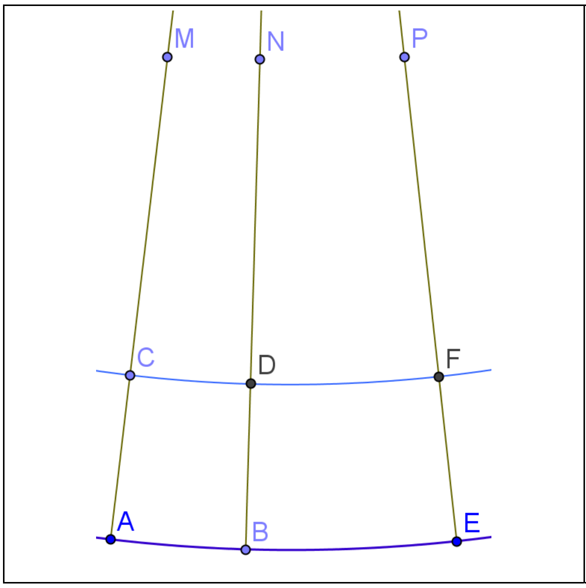
同様にして，B が AE 上の時は $\overline{\mathrm{AE}} = k\overline{\mathrm{AB}}$ とすると，

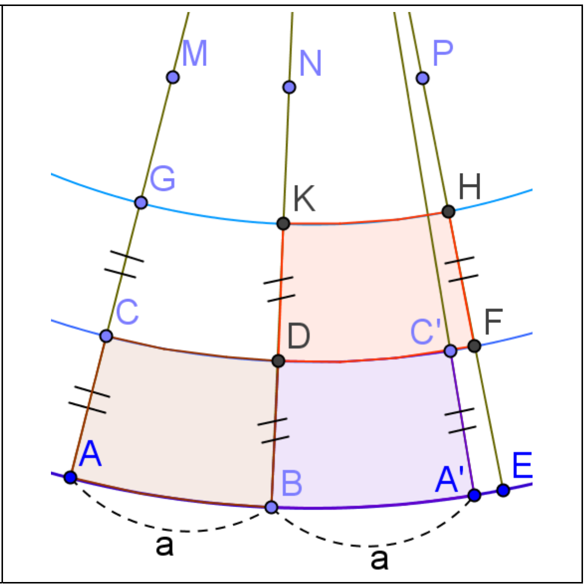
$$\overline{\mathrm{AE}} : \overline{\mathrm{CF}} = k\overline{\mathrm{AB}} : k\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}}$$

即ち，特定の互いに等距離にある 2 つの極限円については，定理は成り立つ．更に,右下図で，$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{CG}}$ かつ $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DF}}$ とすると，四角形 ABDC と四角形 DFHK も合同となって，

$$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{DF}} : \overline{\mathrm{KH}} \quad (\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CG}} \text{ のとき})$$

同様にして，任意の互いに等距離にある 2 つの極限円についても，定理は成り立つ．



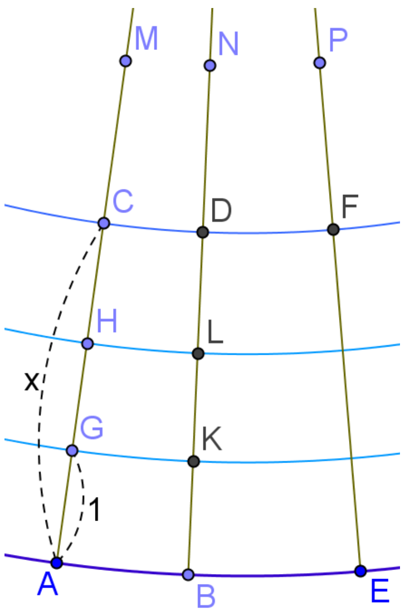


[horicircle and equi distance.ggb]

§24.　§23 の関数 $f(x)$ は，指数関数となる．

左下図で AE と CF は互いに等距離にある極限円で，AM, EP はその共有される軸とする．この時 AE 上の任意の点を B，軸 BN と CF の交点を D，$\overline{AC}=x$ とすると，

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=e^{-kx}\ \ (k\ は正の定数)$$



[証明] 仮に「$x=3$」とし，「$\overline{AG}=\overline{GH}=\overline{HC}=1$」となるように，3 等分点 G, H をとると，§23 より，

$$\frac{\overline{GK}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{HL}}{\overline{GK}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{HL}}$$

ゆえに，

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{GK}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{HL}}{\overline{GK}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{HL}}=\left(\frac{\overline{GK}}{\overline{AB}}\right)^3 \quad (x=3\ の時)$$

同様にして，x が自然数の場合，

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\left(\frac{\overline{GK}}{\overline{AB}}\right)^x=a^x=e^{(\log a)x}=e^{-kx}\ \ (k>0)$$

x が有理数 n/m (n,m 自然数)の時も 単位長を $1/m$ に取り直せば，同様に証明できる．x が実数の時は，連続性を使うと良い．

[注] Bolyai は

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=e^{kx}=X$$

とおいて，「極限円間の距離 x に対応する弧長の**増加**の割合を X」と置いています．同様，「$e^{ka}=A$」のように「長さ a に対応する弧長の増加の割合を A」とおきます．即ち「対応する大文字のアルファベット」を使って表しています．この方法は「定数 k が出てこない」と言うメリットがありますが，慣れないうちは非常に分かりにくく，Bolyai の本以外に 採用されている本は，まだ見たことがありません．

[H+モデルによる証明]

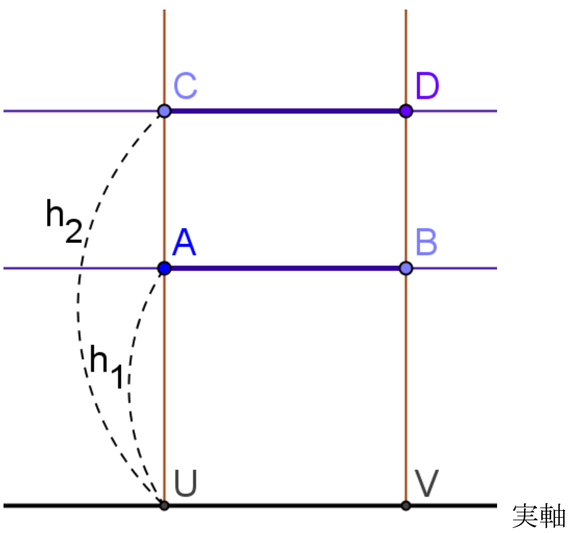
２つの，実軸に平行な極限円があり，その上にそれぞれ 2 点 A,B と C,D をとり，かつ直線 AC と BD は虚軸に平行とする．このとき A,C の虚数成分をそれぞれ h_1, h_2 とすると，H^+での距離の定義より，

$$\begin{cases} [\mathrm{A,B}]=k'\cdot\dfrac{\mathrm{AB}}{h_1}\ ,\quad [\mathrm{C,D}]=k'\cdot\dfrac{\mathrm{CD}}{h_2} & \cdots① \\ [\mathrm{A,C}]=k'\cdot\displaystyle\int_{h_1}^{h_2}\frac{1}{y}\,dy=k'\cdot\log\frac{h_2}{h_1} & \cdots② \end{cases}$$

（但し $k'>0$, [A,B]は「極限円に沿った双曲的距離」を，AB はユークリッド距離を表すとする）

①，②より，

$$\frac{[\mathrm{C,D}]}{[\mathrm{A,B}]}=\frac{k'\cdot\dfrac{\mathrm{CD}}{h_2}}{k'\cdot\dfrac{\mathrm{AB}}{h_1}}=\frac{h_1}{h_2}=e^{-\frac{1}{k'}[\mathrm{A,C}]}=e^{-kx}\ \left(\text{ただし}, k=\frac{1}{k'}>0\right)$$



[注]

$$\frac{[\mathrm{C,D}]}{[\mathrm{A,B}]}=\frac{k'\cdot\dfrac{\mathrm{CD}}{h_2}}{k'\cdot\dfrac{\mathrm{AB}}{h_1}}=\frac{h_1}{h_2}$$ の関係は，§28 の「H+における証明」でも使います．