

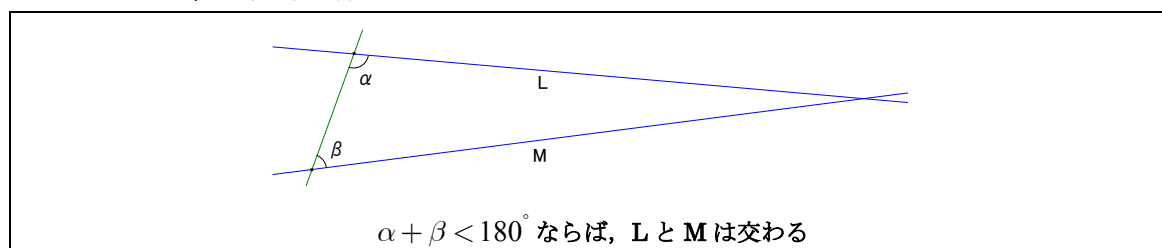
1. ユークリッドの公準と双曲幾何

戦前の教育を受けた方には信じられない事と思いますが、現在の日本の高校の数学の教科書には、ユークリッドの公準は載っていません。「平面幾何」と言う单元こそあるものの、それは「ユークリッド幾何」とは似て非なるものです。そもそも「ユークリッド幾何」では、5つの公準（公理）を立て、その公準から、全てを導こうとしています。今から見ると、5つだけでは全く不十分で、さらに多くの公準が必要ですが、そもそも「幾つかの少数の公理から全ての定理を証明しよう」と言う考え方を、2500年も前に始めた事が非常に特別で偉大な事だと思うのです。従って、その雰囲気だけでも伝える事が、高校レベルでは絶対必要と思うのですが、日本の高校の数学のカリキュラムからはそれが全く読み取れません。悲しい事です。高校生ともなれば、技術的側面だけを教えるのは間違っていると思います。思想も同じくらい大事では無いでしょうか？高校生にもなって、技術のトレーニングだけでは、数学嫌いが増えるのも当然です。私は「ユークリッド幾何から現代幾何へ」と言う本を読んで、初めてユークリッド幾何の世界に触れ、面白く思いました。（それまでは、幾何は古臭いと思っていました。）確かに、現代数学の主流からは離れていますが、初等数学の教育には、幾何はとても良い題材だと思います。また紙がなくても頭の中で考えられるのも、長い時間を、通勤、通学で費やす現代人には便利です。幾何万歳！

さて、ユークリッドの公理は、次の5つあります。なお、ユークリッドの原論では「2直線が平行」を「2直線が交わらない」と定義します。

1-1. ユークリッドの公理(公準)

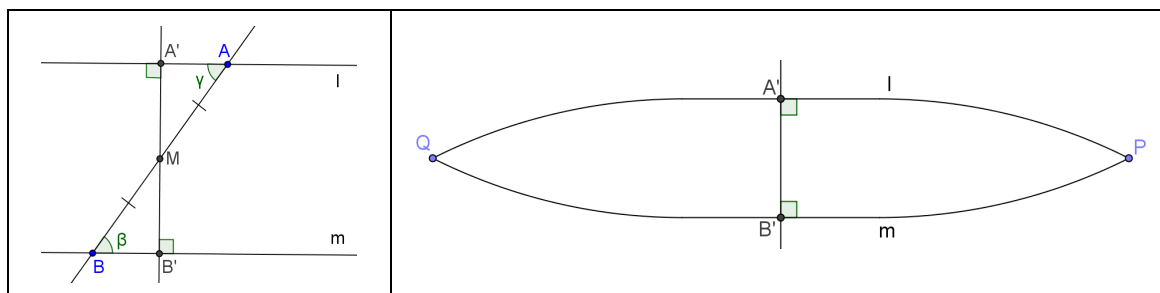
- ①. 与えられた2点A, Bに対し, A, Bを結ぶ線分を1つ, そして唯1つ引くことができる。
- ②. 与えられた線分は、どちら側にも限りなく伸ばすことができる。
- ③. 平面上に2点A, Bが与えられた時、Aが中心でBを通る円はただ1つ描ける。
- ④. 直角は全て相等しい。
- ⑤. 2直線と交わる一つの直線が同じ側に作る内角の和（同側内角の和）が二直角より小さいならば、二直線を伸ばせばどこかで交わる。（下図）



ところが「 $\alpha + \beta = 180^\circ$ ならば 2 直線は平行」が次の様にして証明できます。

(ユークリッドの証明とは違います。ユークリッドは「外角が隣り合わない内角より大きい(外角定理)」を使っています。しかし、外角定理を公準から証明するのは少し時間がかかるのと、球面の場合との比較のために、下記のようにしました。)

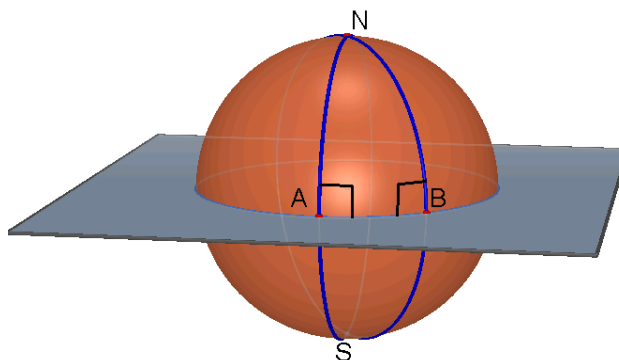
下図で A, B を通る直線をそれぞれ l, m とします。「 $\alpha + \beta = 180^\circ$ 」より錯角は等しく、「 $\beta = \gamma$ 」です。ゆえに線分 AB の中点を M 、 M から l に下ろした垂線の足を A' とすると、1 辺と両端の角が相等なので「 $\triangle AA'M \equiv \triangle BB'M$ 」。故に $A'M$ と m の交点を B' とすると、 $\angle MB'B$ も直角です。ところが「 $A'B' \perp l$ かつ $A'B' \perp m$ 」の時、「直線 $A'B'$ に関し l, m も対称」なので、 l と m が $A'B'$ の右側で交点 P で交わったとすると、 $A'B'$ の左側の点 Q でも交わります。即ち P, Q を通る直線が 2 本となり、公理①と矛盾します。故に「 $\alpha + \beta = 180^\circ$ ならば 2 直線は平行」です。(右下図では、直線 l と m は「曲げて」描いています。)



即ち、公理①～④が満足されている限り、平行線は必ず引けます。問題は「何本引けるか?」です。従って、⑤は次のように言い換えることができます。

⑤' 直線 l とその上にない点 A に対し、 l に平行で A を通る直線は、「一本だけ」引ける。

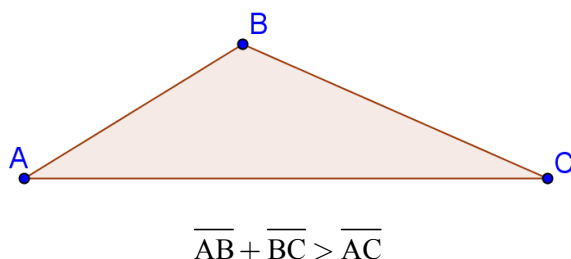
注) 球面でも、大円を直線と考えると幾何が作れますが、球面では 2 点を通る直線(大円)は無限に引けます。また、同側内角の和は 180 度ですが、2 本の直線は N と S で交わります。



この 5 つの公準から全てのユークリッド幾何の定理が作られるのは驚きです。(何故高校ではこういう事を教えないのでしょうか？ 高校時代にこういう話を聞いたかったです.)

しかも, かなりの定理が, 第 5 公準なしで証明されます. 例えば,

- ①三角形の合同条件 (この内「二辺挟角相等なら合同」は, 今では公理に入っているようです.)
- ②二等辺三角形の底角は等しい. 逆も成り立つ.
- ③三角形の外角は, 隣り合わない内角より大きい (この証明には第 5 公準は使いません!)
- ④三角形において, 大きな内角を張る辺の方が長い. 逆も成り立つ. ($\angle A > \angle B \iff a > b$)
- ⑤三角形の二辺の和は, 残りの一辺より長い.



- ⑥三角形の内角の和は, 180 度を超えない. (サッケリー)

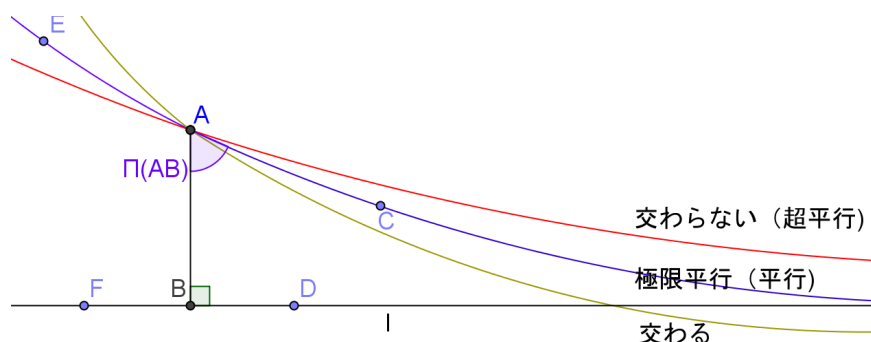
などは第 5 公準なしで証明できます。(丸数字は, 原論の命題の番号とは無関係です. また最後の⑥はサッケリーによる証明で, 1700 年ごろの事です. ズーと後世の証明です. なお, 球面では公準①が成り立たないので, ⑥も不成立です.)

とりわけ, ⑤は「直線が最短距離曲線である」という事を「ほぼ」証明しています. ユークリッドは「直線」を「最短距離線」とは定義していません. それでも, 4 つの公準から「直線は最短距離線である」と言う事が証明できるのは とても興味深いです. 即ち,

未知の曲線が, 4 つの公準を満たしてさえいれば, それは最短曲線となり, 新しい幾何がその曲線を使って作れます. さらに, もし第 5 公準も満たしてあれば, その曲線を使ってユークリッド幾何の全ての定理が成り立ちます. その「未知の曲線」に当たるのが, 第 2 章で述べる「極限円」で, その極限円が存在する曲面が「極限球」です.

ユークリッドの公理と, それから導かれる定理について, 詳しくは, 小林昭七著「ユークリッド幾何から現代幾何へ」をご覧ください. (上の定理の証明も全て簡潔に載っています.) 以下の章において, ①~④の公準は成り立つものとします. また連続性も仮定します. さらに 角度も実数で表せるとします.

1-2. 極限平行 と 平行線角



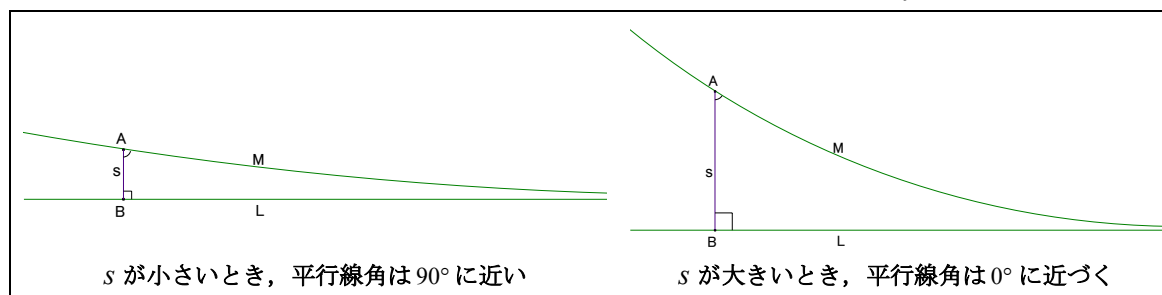
直線 l 外の 1 点を A , A から l に下ろした垂線の足を B とします. (公準③より, 垂線の足は必ず存在します.) A を通る直線 m を考え, m と AB のなす角 θ を, 90° から徐々に小さくします. 1-1 より, $\theta = 90^\circ$ なら l と m は交わりません. しかし 90° より小さくしてもやはり交わらないかもしれません. このような「 l と m が交わらない最小の鋭角 (の上限)」を「 AB に対する平行線角」と言い $\Pi(AB)$ と書きます. (連続性を使っています.)

このとき, l と m は極限平行 (または漸近平行, 平行) と言います. 2 直線が交わらず, 極限平行でもない時, 超平行と言います. 明らかに, 一方の向きに極限平行な 2 直線は, 逆の向きには離れます. 従って 2 直線が平行な時, その「平行の向き」も指定する必要があります. 上図では, 直線 AC と BD は極限平行ですが, 直線 AE と BF は超平行です. また直線 AC と BD が極限平行なとき, $AC \parallel\!\!\!\parallel BD$ と表します.

注) 直線 AB と BA は「極限平行」を扱う時は別物です. 半直線 AB, BA の方が正確ですが, 面倒なので, 上記のようにしました. また, 極限平行という用語と記号は, Bolyai と難波先生の訳語に拠ります.

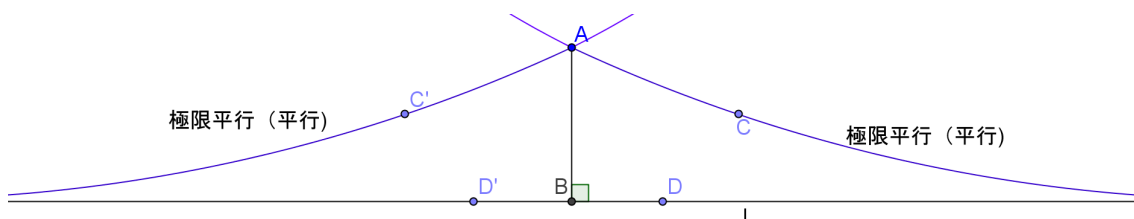
ユークリッド平面では $\Pi(AB) = 90^\circ$ です. $\Pi(AB) < 90^\circ$ の時は, 双曲平面と言います.

以下の章は, 全て 双曲平面 (空間) で考えます. このとき, $\overline{AB} = s$ とすると, $\Pi(s)$ は, 明らかに s の減少関数です. (Π は「 π のロシア大文字」です. Lobachevsky が初めて使いました.)



平行には「向き」があるので、「A を通り l と極限平行な直線」はちょうど 2 本引けます。

下で、 C, D' は直線 AB に関し C, D を対称移動した点です。この時「A を通り l と極限平行な直線」は、直線 AC と AC' の ちょうど 2 本 です。（ $AC \parallel BD$ かつ $AC' \parallel BD'$ ）



1-3. 双曲平面の公理

以上から、双曲平面の公理は以下の 5 つになります。①~④はユークリッドと同じです。従って、1-1 の①~⑥の定理は、双曲平面でも成り立ちます。

双曲空間の公理：

- ①. 与えられた 2 点 A, B に対し、 A, B を結ぶ線分を 1 つ、そして唯 1 つ引くことができる。
- ②. 与えられた線分は、どちら側にも限りなく伸ばすことができる。
- ③. 平面上に 2 点 A, B が与えられた時、 A が中心で B を通る円は だけ 1 つ描ける。
- ④. 直角は全て相等しい。
- ⑤. 2 直線と交わる 1 つの直線が同じ側に作る内角の和（同側内角の和）が 2 直角より小さくても、交わらない 2 直線が存在する。

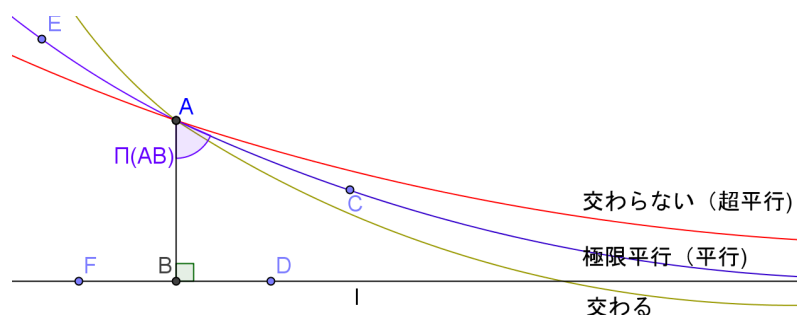
⑤は、次の⑤'に言い換えられます。

- ⑤' 直線 l とその上にない点 A に対し、 l に極限平行で A を通る直線は「2 本」引ける。（ l の 2 つの向き—右と左—に 1 本ずつ引ける。）

1-4. 直線の性質

直線の性質に関しては色々有りますが，つぎの3つだけ挙げます．

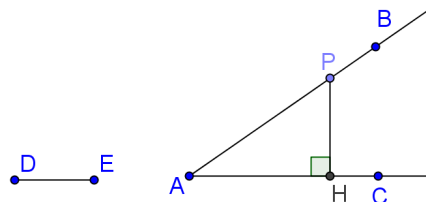
- ① 2直線が極限平行なとき，「平行の向き」には，2直線は限りなく近づくが，「平行でない向き」には，2直線は限りなく離れる．
- ② 2直線が交わるとき，交点では距離は当然ゼロだが，交点から離れれば離れるほど，2直線は限りなく離れる．
- ③ 2直線が超平行なとき，共通垂線が引ける．この共通垂線から離れれば離れるほど，2直線は限りなく離れる．



①は，上図から明らかにも見えますが，「限りなく離れる」と言う点は，少し疑問に思われるかも知れません．次の「アリストテレスの公理」を使います．

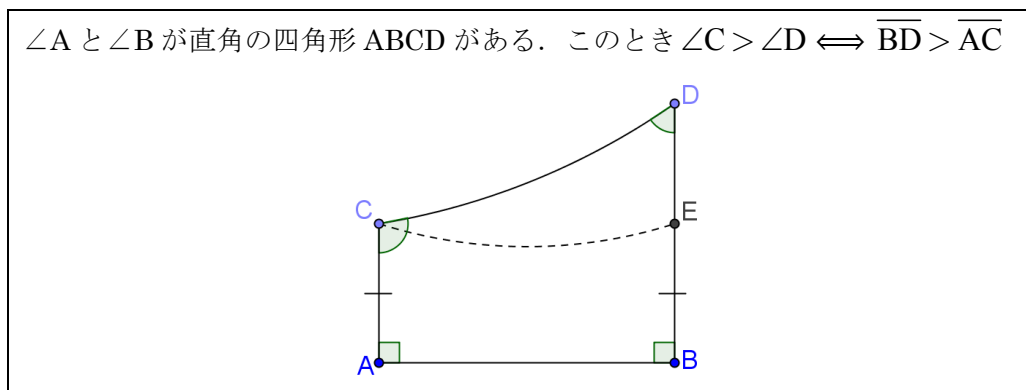
アリストテレスの公理

1点から2本の直線が，角を作って無限に伸びているとき，それらの間の間隔は，無限に広がる．すなわち，下の図で，鋭角BACと線分DEが与えられているとき，半直線AB上の点Pで，PからACに下ろした垂線PHがDEより長くなるような点を とれる．



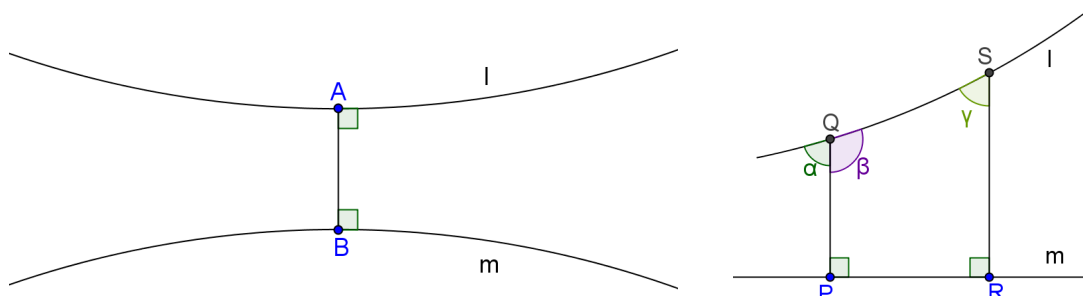
この公理は，厳密には「ユークリッドの公準①～④」だけでは証明できません．しかし角度が実数で表せる（通常の）場合は，かなり長くなりますが，証明できます．証明には「三角形の内角は180度を超えない」と言う定理が必要です．かなり後世の証明となります．

この証明は、ハーツホーン著「幾何学」に詳しく載っています。「アリストテレスの公理」を使うと、①と②は明らかです。③には、サッケリー(1667-1733)の次の定理を使います。



証明は、ハーツホーン著「幾何学」をご覧ください。この本には、サッケリーの定理が、他にもたくさん載っています。なお、上図の四角形 $ABEC$ を「サッケリー四角形」と言います。 $(\overline{BE} = \overline{AC}, \angle A = \angle B = 90^\circ)$ この四角形を彼は深く研究し、Bolyai の 100 年も前に、双曲幾何まであと一歩の所まで到達していました。この定理や「アリストテレスの公理」の証明には、この四角形を使います。

この定理から、2 直線に正の最短距離があれば、それは共通垂線の時である事がいえます。



なお「距離が無限に開く」だけでなく「単調増大」する事も証明できます。「三角形の内角は $2\angle R$ を超えない (サッケリー)」ので、四角形の内角は $4\angle R$ を超えません。故に上図で、

$$\alpha < \beta, \quad \beta + \gamma \leq 180^\circ \quad \therefore \alpha + \gamma < 180^\circ$$

一方「 $\alpha + \beta = 180^\circ$ 」なので、

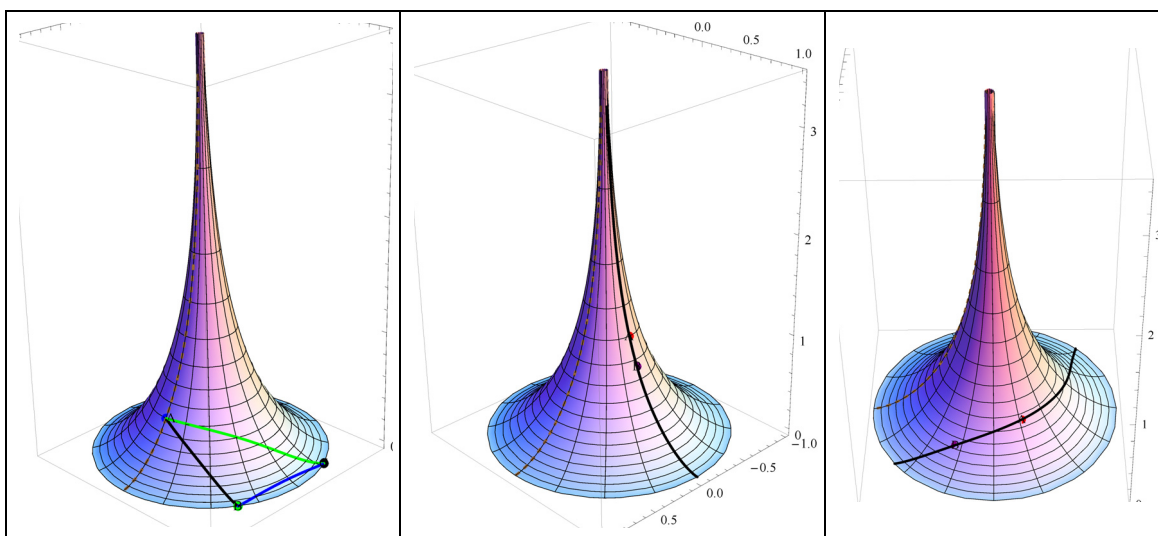
$$\beta > \gamma$$

よって、サッケリーの定理より、 $\overline{RS} > \overline{PQ}$ となります。

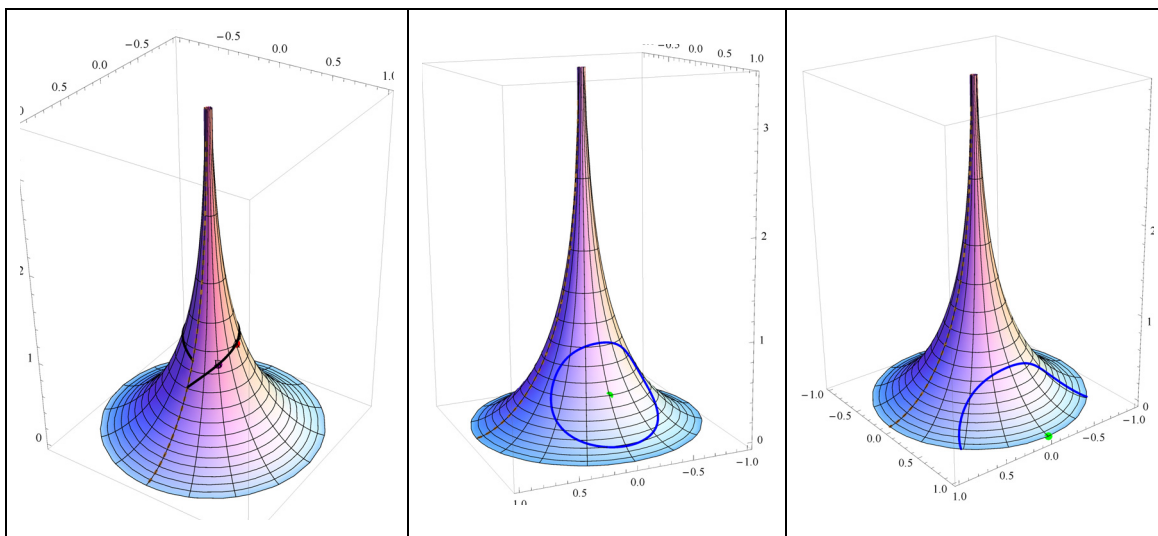
1-5. 双曲平面を「見る」

1-5-1. 擬球

双曲平面を「そのまま」目で見ることが出来ます。それを**擬球**といいます。擬球上では、**長さ**と**角度**が「見た目どおり」です。即ち、普通に定規や分度器を当てて測った長さと角は、そのまま双曲平面での長さと角になります。例えば、左下図での「三角形」は「二つの角が約 35 度の直角 2 等辺三角形」に見えますが、実際にその様な「双曲的直角 2 等辺三角形」です。三角形の角度の和は 180° より小さく見えます。左下図の太線の他に、頂点から底円に向かって垂直に降りてくる太線(中央下)や、右下図の太線も直線（最短距離線）です。



しかし**擬球モデル**は、双曲平面の一部しか表せません。「**双曲平面に開いた細長い窓**」です。上の方には無限に長いですが、下の方や右左には有限です。左下図の直線は途中で切れています。また中央下図と右下図は共に円ですが、右下図の円も、途中で切れています。

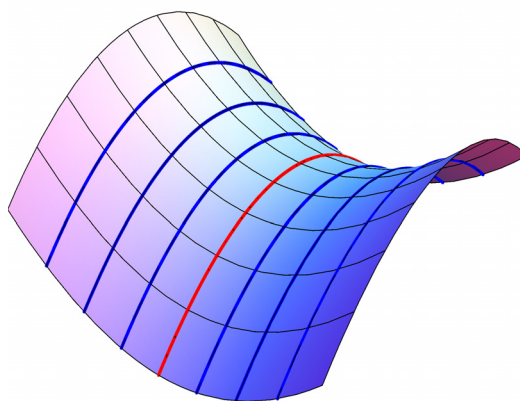


先の図形は *Mathematica6* で作りました. *Manipulate* を使用しているので, マウスで動かしてみる事ができます. (無料の *Mathematica player* が必要) [line&circle.nbp](#)

なお, 擬球について詳しいことは, [擬球のページ](#) をご覧ください.

1-5-2. 凹曲面

擬球は, 曲がり方 (曲率) が一定となるただ 1 つの凹曲面です. 一般の凹曲面は, 曲率が一定でないので, 図形の合同な移動ができません. 従って双曲平面とはなり得ませんが, その代わり, 無限に広がっている有様がイメージできます. 下の曲面は「 $z = x^2 - y^2$ 」ですが, 2 本の超平行な直線が, 限りなく遠ざかる感じが「なんとなく」つかめます.



(注) プラスチックでできた三角形のように「硬い」図形なら, 曲がり方が違えば, 重ねあわす事はできない事は明らかですが, 紐でできた三角形のように「柔らかい」図形なら重ねあわす事ができそうな気がします. 確かに紐でできた直線 (線分) を考えると, 上の曲面でも, 公準の①, ②, ③は満足されます. しかし, ④の「**直角は全て重ねあわす事ができる**」が満足されません. 例えば, $\angle A = \angle R$ の直角 2 等辺三角形を考えます. ここで, 点 A を点 A' に移動し, コンパスを使って, 「 $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$ 」の $\triangle A'B'C'$ を作ります. しかしこの時, A' に於ける曲率が A に於ける曲率と違っていると, $\angle A'$ は直角となりません. 故に, 公準④が成り立ちません. 公準④は, 三角形の合同条件と深く関係しています. 現代では合同条件の方が公理となっています.

